МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ШКОЛА

ЛЕКЦИИ И ЗАДАЧИ

X

ИЗДАТЕЛЬСТВО МОСКОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА · 1966

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
МОСКОВСКОЕ МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОБЩЕСТВО

ИНСТИТУТ ОБЩЕГО И ПОЛИТЕХНИЧЕСКОГО ОБРАЗОВАНИЯ
АКАДЕМИИ ПЕДАГОГИЧЕСКИХ НАУК

М А Т Е М А Т И Ч Е С К А Я Ш К О Л А

ЛЕКЦИИ И ЗАДАЧИ

X

Издательство Московского Университета
1966

В сборниках " Математическая школа " публикуются учебные материалы по математике в специализированных математических школах (Московские школы №№ 2, 7, 444; школа интернат № I8 при МГУ) и Вечерней математической школе при механико-математическом факультете МГУ. Материалы имеют экспериментальный характер. Руководит изданием редакционный совет в составе:

Э.Б.ВИНБЕРГ, Е.Б.ДЫНКИН, А.А.ЕГОРОВ, КУЗНЕЦОВА Т.И. (художник) , В.И.ЛОМОНОСОВ (зам.редактора), Ж.М.РАББОТ (зам. редактора), С.И.ШВАРЦБУРД (редактор), И.М.ЯГЛОМ.

Содержание:

I. В ВЕЧЕРНЕЙ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ШКОЛЕ .

Итоги конкурса по решению задач

а) по 7-м классам (А.Л.РОЗЕНТАЛЬ). 3

б) По 8-м классам (А.Б.КАТОК и В.И.ЛОМОНОСОВ) 32

2. КОНКУРС ВМШ. 39

3. Материалы вступительных экзаменов. 44

4. Московская олимпиада (А.А.ЛЕМАН). 51

5. Всероссийская математическая олимпиада I966 года. 62

6. Международная математическая олимпиада I966 года (Е.А.МОРОЗОВА). 65

7. Лекция по алгебре (Ю.И.МАНИН). 67

8. О занятиях Вечерней математической школы. . . . 75

Л-45765. Подп. к печати 16/XП-66г. Ф. 60x90/16
Объем 4,75 п.л. Зак. 2119. Тираж 1000. Цена 10к.

Отпечатано на ротапринтах в тип. Изд-ва МГУ
Москва, Ленинские горы.

7 классы. Третий цикл.

А.Л.Розенталь

Третий цикл конкурса задач Вечерней математической школы продолжался с 26 февраля по 30 апреля 1966 года.

Подведение итогов и награждение победителей конкурса проводилось совместно для 7-х и 8-х классов в Главном здании МГУ 10 мая.

В третий цикл конкурса для 7-х классов входили задачи №№ 48-56 и 60-74. При подведении итогов жюри конкурса учитывало не только качество решения, но и степень трудности задачи, которая оценивалась по числу представленных правильных решений.

Так, полные решения задач №№ 52, 62 и 66 оценивались в 12 очков, неполные - в 8 очков; полные решения задач №№ 50,60, 56, 63, 64 - 7 очков, неполные - в 5 очков; полные решения остальных задач - в 10 очков, неполные в - 7 очков.

За особенно красивые и оригинальные решения очки набавлялись.

Следует отметить рост мастерства участников конкуроа. Задачи третьего цикла были в среднем труднее задач второго цикла, тем не менее число правильных решений увеличилось, а их качество заметно возросло.

Ниже мы приводим список победителей этого конкурса и решения задач третьего цикла. Следует отметить, что приводимые решения задач не являются полными, порой носят конспективный характер. В слунаях, когда некоторые детали доказательств опущены, соответствующие утверждения вводятся словами " легко доказать", " легко убедиться" и т.п.

Некоторые задачи решаются при помощи методов, которые семиклассники знать не обязаны (метод вращения в задаче №49, метод подобия в задаче № 65 и др.) Соответствующие решения легко можно было бы изложить так, чтобы обойтись без упоминания об этих методах, однако это не сделано для экономии места.

Победители конкурса 7-х классов.

I премия	Шокуров Александр	2 шк. гр.А
2 премия	Гавриков Михаил	2 шк. гр.А
	Каменский Александр, Фейгин Борис	2 шк. гр.С
	Локуциевский Виктор	2 шк. гр.А
	Пухов Александр	396 шк. гр.В
3 премия	Анулова Светлана	42 сп.шк. гр.G
	Гурвич Владимир, Черноуцан Алексей	2 шк. гр.А
	Гнесин Борис, Зелевинский Андрей	2 шк. гр.G и А
	Литвин Юрий	2 шк. гр.А
	Полоцкий Владимир	10 шк. гр.В
4 премия	Елецкий Владимир	39 шк. гр.Е
	Куликов Виктор	750 шк. гр.Д
	Крысанов Владимир	455 шк. гр.F
	Неклюдова Елена	123 шк. гр.А
	Петухов Владимир	208 шк. гр.Е
	Райгородский Михаил	252 шк. гр.Е
	Розеноер Сергей	396 шк. гр.В
	Сирота Лев	91 шк. гр.Д
	Соболев Геннадий	2 шк. гр.А
	Толстунов Виктор	7 сп.шк. гр.Д
	Тумаркин Виктор	2 шк. гр.А
	Шехтман Валентин	22 шк. гр.G
Специальные премии за красивое решение задачи № 73	Каменский Александр, Фейгин Борис	2 шк. гр.С
	Шехтман Валентин	22 шк. гр.G

Решения задач цикла № 3 для 7-х классов

Задача № 48. На двух деревьях вблизи дома на разной высоте вбиты два крюка. Концы бельевой веревки закреплены на этих крюках, и веревка должна проходить через третий крюк, вбитый в угол дома. На какой высоте надо вбить этот третий крюк, чтобы длина веревки была наименьшей ?

Решение. Обозначим расстояние от угла дома до первого дерева через m ,до второго – через n . Пусть первый крюк вбит на высоте h_1 , второй – на высоте h_2. Чтобы длина веревки была наименьшей, надо третий крюк вбить на высоте $h_3 = \frac{mh_2+nh_1}{m+n}$. Докажем это. Мысленно повернем второе дерево вокруг оси, проходящей через угол дома, как показано на рис. 1 , так, чтобы стволы деревьев и угол дома оказались в одной плоскости. Легко убедиться, что если третий крюк вбит на высоте h_3 , то все три крюка окажутся на одной прямой, и в этом случае длина веревки будет наименьшей (штрих-пунктиром на рис. 1 показано положение, которое займет веревка, если третий крюк вбит на высоте, отличной от h_3).

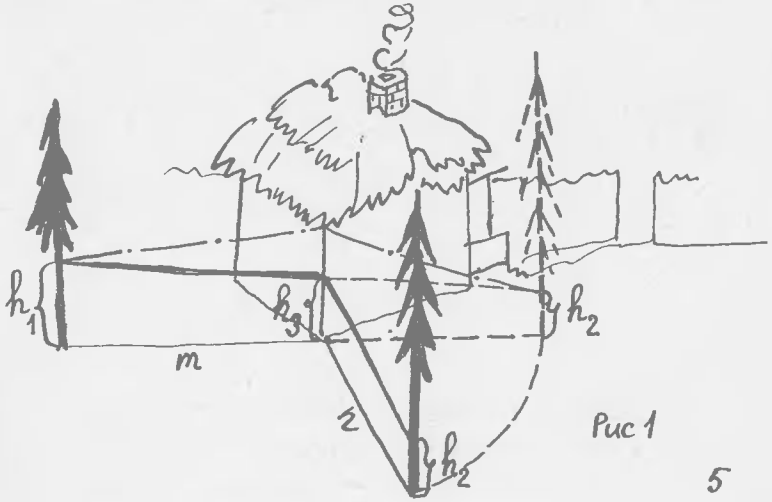


Рис 1

Задача № 49. Даны окружность С и точка А. Провести через А прямую, на которой окружность С высекает хорду данной длины.

Решение. Обозначим центр окружности С через О (см. рис. 2). Проведем какую-нибудь хорду B_1D_1 данной длины и возьмем на прямой B_1D_1 точку A_1 так, что $OA_1=OA$. Будем поворачивать треугольник A_1OD_1 (или B_1OD_1, если точка А лежит внутри круга) до тех пор, пока точки A_1 и А не совпадут. При этом хорда B_1D_1 займет положение BD. Прямая BD – искомая. Ее построение очевидно.

Обозначим середину хорды B_1D_1 через М. Нетрудно убедиться, что если $AO>MO$, то задача имеет два решения (рис. 2), если $AO=MO$ – одно, а если $AO<MO$ – ни одного.

Если искомая хорда равна диаметру окружности, то задача имеет только одно решение, а если больше, то ни одного.

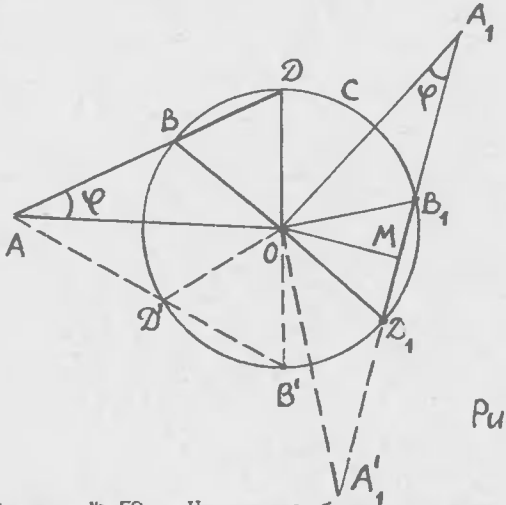


Рис 2.

Задача № 50. На доске было написано пять чисел. Сложив их попарно, получим следующие десять чисел: 0, 2, 4, 4, 6, 8, 9, 11, 13, 15. Какие пять чисел были написаны на доске?

Решение. Обозначим искомые числа (в порядке возрастания) через a_1, a_2, a_3, a_4 и a_5; наименьшая из сумм $a_1+a_2=0$, вторая по величине $a_1+a_3=2$, затем идут суммы a_1+a_4 и a_2+a_3 и, значит, обе эти суммы равны 4. Отсюда $a_1+a_3+a_2+a_3=6$ и $a_3=3$. Следовательно, $a_1=-1$, $a_2=1$, $a_4=5$. Наибольшая из сумм $a_4+a_5=15$, значит, $a_5=10$. Итак, на доске были написаны числа I, I, 3, 5, I0.

Задача № 5I. Доказать, что любой треугольник можно разрезать тремя прямолинейными разрезами на части и передвинуть эти части по плоскости так, что они составят треугольник, зеркально симметричный данному.

Решение. Разрежем треугольник по лучам, идущим из центра вписанного в треугольник круга перпендикулярно сторонам. Легко видеть (см.рис. 3), что образовавшиеся части можно передвинуть по плоскости так, что получится треугольник, зеркально симметричный исходному.

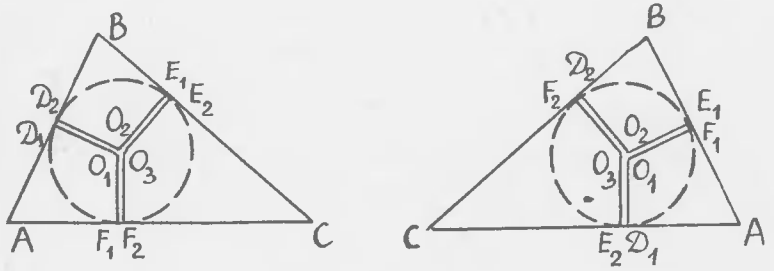


Рис 3

Заметим, что можно обойтись двумя разрезами. В самом деле, пусть AC – наибольшая сторона треугольника ABC, BH – высота, K и L – середины сторон AB и BC (см.рис. 4)

3-2119

Разрежем треугольник по HK и HL, а затем части AKH и CLH передвинем по плоскости, как показано на рис. . Нетрудно доказать, что при этом получится треугольник HH_1H_2 зеркально симметричный ABC.

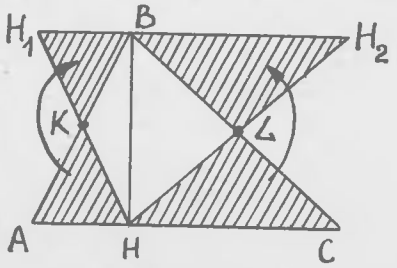
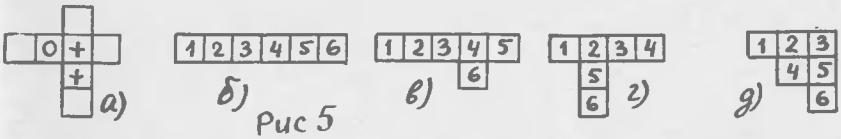


Рис 4

Задача № 52. На клетчатой бумаге нарисована некоторая фигура, состоящая из клеток. Двое играют в "крестики-нолики" на этой фигуре по следующим правилам: выигрывает тот, кому удалось поставить три своих значка в ряд или по диагонали; если это не удалось никому, считается, что игра закончилась вничью. Какое наименьшее число клеток может содержать фигура, чтобы начинающий мог выиграть, как бы ни играл его противник (построить пример такой фигуры с минимальным числом клеток и доказать, что на любой фигуре с меньшим числом клеток второй участник может предотвратить победу начинающего)?

Решение. На фигуре из семи клеток, показанной на рис. 5а), начинающий может выиграть, как бы ни играл его противник: сначала он ставит крестик на пересечении рядов, а затем на одну из средних клеток в ряду, на котором нет нуля.



а) б) в) г) д)

Рис 5

При любом ходе противника начинающий может выиграть на третьем ходу. Если фигура состоит не более, чем из шести клеток, то второй участник всегда может предотвратить победу первого. Докажем это.

Будем называть " путем " часть фигуры, состоящую из трех клеток, стоящих в ряд или по диагонали. Фигура на рис. 5б имеет четыре пути: (1,2,3); (2,3,4); (3,4,5) и (4,5,6), а у фигуры, показанной на рисунке 5д ,три пути: (1,2,3); (3,5,6) и (1,4,6).

Для того, чтобы предотвратить победу начинающего, второму участнику достаточно поставить по одному нолику на каждый путь и тем самым перекрыть его. Если фигура содержит не более двух путей, то второй участник может двумя ходами перекрыть все пути.

Рассмотрим фигуры, содержащие более двух путей. Если фигура содержит пять или шесть рядом стоящих клеток, то все пути находятся в этом ряду (рис. 5б и в).Поставив нолик на третью или четвертую от края клетку, второй участник оставляет только один неперекрытый путь. Вторым ходом он может перекрыть и этот путь. Если фигура содержит четыре рядом стоящие клетки, то у нее есть еще самое большее один путь, не стоящий в этом ряду (рис. 5г). Поставив нолик на одну из двух средних клеток этого ряда, второй участник может перекрыть сразу два пути.

Теперь рассмотрим фигуру, в которых никакие четыре клетки не стоят в ряд (легко видеть, что такие фигуры из шести клеток не могут иметь более трех путей). Если такая

фигура содержит три пути, то каждые два пути должны иметь общую клетку (рис. 5г) и есть три таких клетки, в которых пересекаются два пути. Поставив нолик на одну из этих клеток, второй участник первым же ходом перекроет два из трех путей.

Задача № 53. Найти все выпуклые центрально-симметричные фигуры площади I, внутри которых содержится треугольник площади I/2.

Решение. Найдем все выпуклые центрально-симметричные фигуры площади I, внутри которых содержится данный треугольник ABC площади I/2 (рис. 7а)

Докажем , что центр симметрии O такой фигуры не может находиться вне треугольника DEF ,образованного средними линиями треугольника ABC.

Если бы,например, точка O и сторона AC находились по разные стороны от прямой DE ,то фигура должна была бы содержать в себе параллелограмм AC_1A_1C , площадь которого больше единицы, так как его основание AC совпадает с основанием треугольника ABC, высота больше, чем высота BH этого треугольника (рис. 7а). Так же рассматриваются и другие случаи расположения точки O вне треугольника DEF .

Пусть теперь точка O лежит на границе треугольника DEF , например, на стороне DE (рис. 7б). Тогда фигура должна содержать в себе параллелограмм AC_1A_1C площади I и,следовательно, должна совпадать с этим параллелограммом.

Рассмотрим,наконец, случай, когда центр симметрии фигуры O лежит строго внутри треугольника DEF . Тогда наша фигура должна содержать в себе шестиугольник $AC_1BA_1CB_1$ (точки A_1, B_1, C_1 симметричны точкам A , B и C относительно O (см.рис. 7б). Мы докажем,

что площадь шестиугольника равна I, и значит, искомая фигура совпадает с шестиугольником.

В самом деле, треугольники ACB_1 и A_1C_1B симметричны относительно O и значит, равны, т.е. площадь шестиугольника равна площади параллелограмма AC_1A_1C плюс удвоенная площадь треугольника C_1BA_1, т.е.

$$AC\cdot KH+2\left(\frac{1}{2}C_1A_1\cdot BK\right)=AC(BK+KH)=AC\cdot BH=$$
$$=2\left(\frac{1}{2}AC\cdot BH\right)=2\cdot\frac{1}{2}=1$$

что и требовалось доказать.

Следовательно, искомые фигуры являются параллелограммами или выпуклыми центрально-симметричными шестиугольниками.

Покажем, что верно и обратное, т.е. параллелограмм площади I и всякий выпуклый шестиугольник площади I содержат в себе треугольник площади I/2. Для параллелограммов это очевидно. Докажем это для шестиугольников.

Пусть $AC_1BA_1CB_1$ (рис. 76)- такой шестиугольник. Площадь треугольника ABC равна

$$\frac{1}{2}AC\cdot BH=\frac{1}{2}\left(A_1C_1\cdot BK+AC\cdot KH\right)$$

Здесь в скобках стоит площадь шестиугольника, равная I, т.к. $AC\cdot KH$ есть площадь параллелограмма AC_1A_1C, а $A_1C_1\cdot BK$ равно сумме площадей треугольника C_1BA_1 и равного ему треугольника ACB_1. Все доказано.

Задача № 54. На столе лежат I5 журналов, полностью закрывая его. Доказать, что можно убрать 7 журналов так, чтобы оставшиеся закрывали не менее 8/I5 площади стола.

Решение. Примем площадь стола за единицу. Отметим те 7 из I5 журналов, у которых площадь соприкосновения со столом наименьшая.

Докажем, что общая площадь соприкосновения остальных 8 журналов со столом не меньше 8/I5. Допустим противное, т.е. что эта площадь меньше 8/I5, и значит, среди этих восьми есть журнал, площадь соприкосновения которого со столом меньше I/I5.

Площадь соприкосновения 7 отмеченных журналов со столом должна быть больше 7/I5 и среди них должен быть журнал, площадь соприкосновения которого со столом больше I/I5. Но площадь соприкосновения со столом каждого из отмеченных журналов не может быть больше, чем у любого из остальных, поэтому получается противоречие.

Уберем 7 отмеченных журналов, а остальные положим на прежние места. Так как при этом площадь их соприкоснове - ния со столом может только увеличиться, то они будут за- крывать не менее 8/I5 площади стола.

Задача № 55. Стороны выпуклого многоугольника периметра P см отодвигаются каждая на I см. Доказать, что при этом площадь увеличится более, чем на $P+\pi$ см.

Решение. Восставим из вершин первоначального многоугольника перпендикуляры к его сторонам длиной I см. Пусть число его сторон n. Как легко видеть (см.рис. 6), больший многоугольник разобьется при этом на $2n+1$ часть: первоначальный многоугольник, n прямоугольников общей площадью P см^2 (сумма оснований этих прямоугольников P см, а высоты равны I см) и n четырехугольников, общая площадь которых превышает πсм^2, т.к. из них можно составить n - угольник, описанный около круга радиуса I см.

Отсюда видно, что площадь получившегося (большего) многоугольника превышает площадь первоначального более, чем на $P+\pi$ см.^{2}

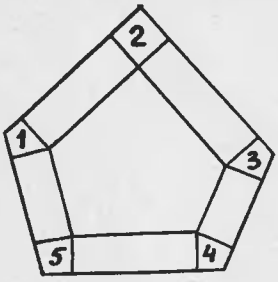


Рис 6.

Задача № 56. Доказать, что уравнение $x^2-y^2=1966$ не имеет решений в целых числах.

Решение. Пусть x и y – какие-нибудь целые числа. Из равенства $x+y=(x-y)+2y$ видно, что числа $x+y$ и $x-y$ либо оба четные, либо оба нечетные. Если $x+y$ и $x-y$ – нечетные числа, то их произведение x^2-y^2 – число нечетное, а если четные, то их произведение делится на 4. Число 1966 четное, но не делится на 4, поэтому $x^2-y^2\neq 1966$, каковы бы ни были целые числа x и y.

Задача № 60. Найти все простые числа P и Q, для которых $P^2-2Q^2=1$.

Решение. Запишем данное равенство в виде

$$\frac{(P+1)(P-1)}{2}=Q^2$$

Если P – четное простое число (т.е. 2), то левая часть равна 3/2 и равенство не может иметь места, т.к. Q^2 должно быть целым числом.

Если же P – нечетное число, то P-I и P+I – числа четные, значит, число $\frac{(P+1)(P-1)}{2}$ – четное.

Для того, чтобы равенство выполнялось в этом случае,

надо, чтобы его правая часть, т.е. Q^2 была четной, а это возможно лишь при четном Q .

Итак, во втором случае необходимо $Q=2$. Есть только одно простое P, при котором выполняется равенство $P^2-2Q^2=1$ для $Q=2$, а именно, P=3.

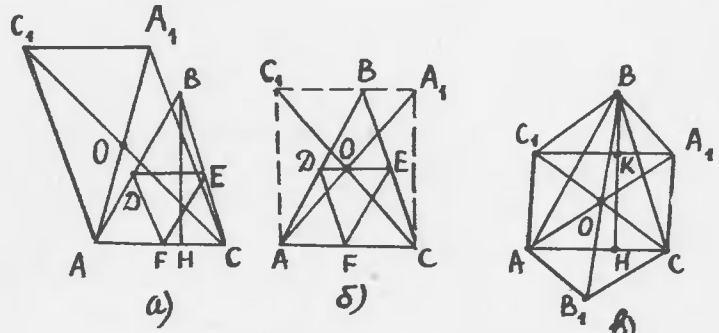


Рис7

Задача № 61. Коробка, имеющая форму прямоугольного параллелепипеда, перевязана двумя веревками, как показано на рис. 8. Веревки в точках пересечения M и N склеены.

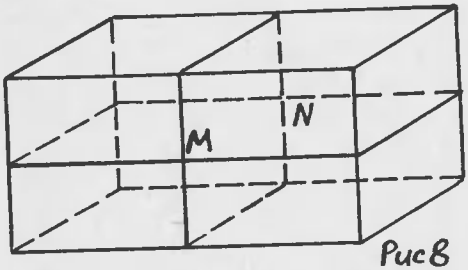


Рис 8

Доказать, что получившийся узел нельзя сдвинуть, не разорвав веревок (считается, что веревки нельзя растягивать и что они абсолютно плотно прилегают к коробке).

Решение. Доказательство будем вести от противного, Узлы M и N делят каждую веревку на две части равной длины. Допуотим, что нам удалось передвинуть узел M в некоторое новое положение M_1, не разорвав веревок (рис. 9). Мы будем предполагать, что M_1 не лежит на PS (остальные случаи рассматриваются аналогично).

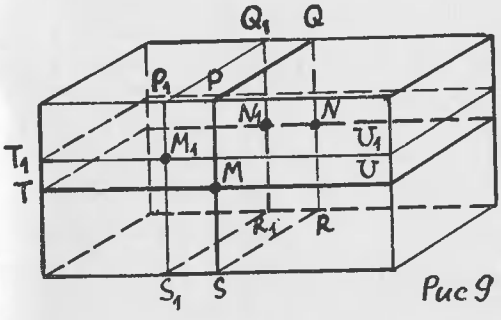


Рис 9

Пусть $P_1Q_1R_1S_1$ -новое расположение "вертикальной" веревки. Очевидно, $P_1Q_1 \geq PQ; Q_1R_1 \geq QR; R_1S_1 \geq RS; S_1P_1 \geq SP$.

Т.к. веревка нерастяжима, то $P_1Q_1+Q_1R_1+R_1S_1+S_1P_1 = PQ+QR+RS+SP$, а это может быть только тогда, когда во всех четырех неравенствах стоит знак равенства. Но $P_1Q_1=PQ$ только в том случае, когда $P_1Q_1 \parallel PQ$. Аналогично, $Q_1R_1 \parallel QR; R_1S_1 \parallel RS; S_1R_1 \parallel SR$. Другими словами, новое положение " вертикальной" веревки представляет собой линию пересечения граней коробки с плос-

костью, проходящей через точку M_1 параллельно плоскости $PQRS$. Так же доказывается, что новое положение" горизонтальной " веревки представляет собой линию пересечения граней коробки с "горизонтальной" плоскостью, проходящей через точку M_1. Следовательно, узел N также, как и узел M, сдвинулся на величину PP_1 по горизонтали и на величину TT_1 по вертикали. Теперь длина части " горизонтальной" веревки между узлами $M_1U_1N_1$ больше длины этой части MUN до сдвига узла, что противоречит условию (веревка нерастяжима).

Задача № 62. Построить такой квадрат, чтобы точки A и B лежали на его границе и сумма расстояний от точки A до вершин квадрата была наименьшей.

Решение. Докажем, что квадрат $AMBN$ (рис. 10), для которого AB является диагональю, искомый.

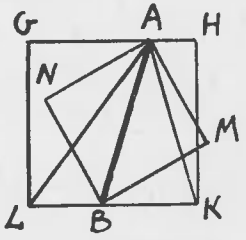


Рис 10

В самом деле, пусть $GHKL$ -произвольный квадрат, на границе которого лежат точки A и B. Пусть, например, точка A лежит на стороне GH этого квадрата, причем $AL \geq AK$ (см. рис. 10). Легко доказать (пользуясь теоремой о связи между длинами наклонных и их проекций), что где бы на сторонах квадрата ни лежала точка B, $AL \geq AB$.

Расстояние между любыми двумя точками квадрата меньше его диагонали; отсюда следует, что квадрат $AMBN$ не больше квадрата $GHKL$, следовательно,

$AK \geq HK \geq AM$; $AG + AH = GH \geq AN$

Отсюда получаем: $AG + AH + AL + AK \geq AN + AB + AM$,

что и требовалось доказать.

Задача № 63. X, Y, Z – целые числа. Кроме того, известно, что $X^2+Y^2=Z^2$. Доказать, что или X, или Y обязательно делится на три.

Решение. Любое целое число N либо делится на три, либо при делении на три дает в остатке или единицу, или два, поэтому любое целое число можно записать в одной из следующих трех форм:

$$3K;\ 3K+1;\ 3K+2,$$

где целое число K есть частное от деления (с остатком) числа N на 3.

Квадрат любого целого числа N либо делится на три, либо при делении на три дает в остатке единицу (т.е. записывается в виде $3p+1$). Действительно, если $N=3K$, то $N^2=3K^2$ и N^2 делится на три.

Если $N=3K+1$, то $N^2=9K^2+6K+1$, т.е. N^2 при делении на три дает в остатке I.

Если же $N=3K+2$, то $N^2=9K^2+12K+4$.

и N^2 при делении на три дает в остатке I.

Если ни X, ни Y не делятся на три, то X^2 записывается в виде $3K_1+1$, а Y^2 – в виде $3K_2+1$, тогда

$$X^2+Y^2=3(K_1+K_2)+2.$$

В этом случае X^2+Y^2 при делении на три дает в остатке два. Так как при делении числа Z^2 на три в остатке не может получиться два, то равенство $X^2+Y^2=Z^2$ в этом случае получиться не может.

Задача № 64. На клетчатой бумаге начерчен квадрат со сторонoй n клеток. Рассматриваются всевозможные прямоугольники, лежащие внутри этого квадрата, стороны которых проходят по границам клеток. Шириной прямоугольника называется длина меньшей из его сторон. Сколько существует прямоугольников данной ширины K ?

Решение. Назовем длиной прямоугольника длину большей из его сторон (у квадрата длина равна ширине). Подсчитаем число различных прямоугольников длины ℓ, где $\ell > K$, т.е. ℓ - это одно из чисел $N, N-1, \ldots, K+2, K+1$. Такие прямоугольники бывают " вертикальными" или "горизонтальными", соответственно тому, как располагается большая сторона, вертикально или горизонтально.

Вертикальных прямоугольников существует столько (размером $K \times \ell$), сколько различных положений может занимать внутри квадрата правая верхняя клетка такого прямоугольника, т.е. $(N-K+1)(N-\ell+1)$ (см.рис. 11, на котором $n=7$; $K=3$; $\ell=4$; крестиками на рис. отмечены положения, которые может занимать правая верхняя клетка).

Столько же существует и горизонтальных прямоугольников. Общее число прямоугольников размером $K \times \ell$ равно $2(N-K+1)(N-\ell+1)$, так же находим общее число различных квадратов размерами $K \times K$; оно оказывается равным $(N-K+1)^2$. Общее число прямоугольников ширины K равно

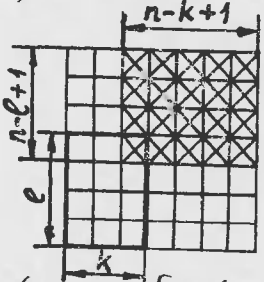


Рис 11

$$2(N-K+1)(N-N+1) + 2(N-K+1)[N-(N-1)+1] + \cdots + 2(N-K+1)[N-(K+1)+1] + (N-K+1)^2 =$$
$$= 2(N-K+1)[1+2+\cdots+N-K] + (N-K+1)^2 =$$
$$= 2(N-K+1)\frac{(N-K)(N-K+1)}{2} + (N-K+1)^2 = (N-K+1)^3$$

Задача № 65. Внутри выпуклого четырехугольника АВСД лежит точка М. Отразим ее от середин сторон четырехугольника и соединим 4 полученные точки так, чтобы они образовали выпуклый четырехугольник. Доказать, что площадь этого

четырехугольника одинакова для любой точки М, лежащей внутри АВСД.

Решение. Обозначим середины последовательных сторон четырехугольника через P, Q, R, S; вершины получившегося четырехугольника – через P_1, Q_1, R_1, S_1 (см. рис. 12).

Четырехугольник $P_1Q_1R_1S_1$ можно получить из четырехугольника $PQRS$ преобразованием подобия с коэффициентом подобия $k=2$ и центром подобия в точке М. Поэтому площадь $P_1Q_1R_1S_1$ равна учетверенной площади $PQRS$, т.е. не зависит от положения точки М.

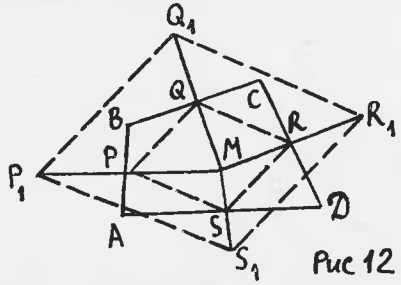


Рис 12

Задача № 66. Требуется отгородить забором длины a прямоугольный участок, а затем к построенному забору пристроить еще один забор длины a так, чтобы его стенки шли параллельно сторонам первого забора и чтобы общая площадь, отгороженная двумя заборами, была наибольшей.

Решение. Мы докажем, что общая площадь будет наибольшей (она равна $\frac{a^2}{6}$), когда заборы имеют форму и размеры, показанные на рис. 13 (площадь, отгороженная одним забором, заштрихована).

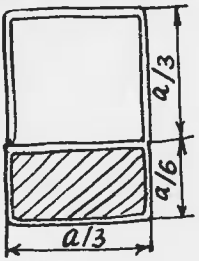


Рис 13

6-2119

Допустим, что размеры первого забора заданы, и покажем, что какую бы форму ни имел второй забор, его можно перестроить так, чтобы новый забор охватывал не меньшую площадь, имел не большую длину и участок, огороженный им, предотавлял собой прямоугольник, примыкающий к одной, большей стороне первого забора . x/

Будем предполагать, что у второго забора нет углов в 270^0, а все углы равны 90^0. В противном случае забор легко перестроить таким образом, чтобы он охватывал большую площадь, как показано на рис. 14 (Подробнее об этом см.решение задачи № 30 конкурса 7-х классов в предыдущем сборнике "Математической школы").

Если участок, охватываемый вторым забором, примыкает к первому с трех или с четырех сторон, то перестраивать второй забор можно, например, как показано на рис. 15а,б: части I,2,3,4 перемещаются в положения $1',2',3',4'$ (здесь и далее новые положения будут обозначаться теми же цифрами и буквами, какими соотьетствующие части забора обозначались до перестройки , только штрихованными).

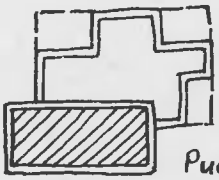


Рис 14

При этом длина забора уменьшится на длину части 5, а площадь не уменьшится, так как прибавившийся прямоугольный участок II имеет не меньшую площадь, чем отпавший участок I: в обоих случаях, показанных на рис. 15 , $AB \leq CD$, а высоты прямоугольников (части 1 и $1'$) равны.

---

x/ В этой части излагается решение, представленное учеником 2 школы Александром Шокуровым (группа "А").

Итак, далее мы будем рассматривать случаи, когда второй участок примыкает к одной или к двум сторонам первого забора.

Пусть, например, второй участок примыкает к первому с двух сторон, но ни одну из сторон не прикрывает полностью (см.рис. 16а,б), Как и в разобранном выше случае, забор можно перестроить, при этом либо одна сторона будет прикрыта полностью, а другая частично (см.рис. 16а),либо новый участок будет примыкать лишь к одной стороне первого забора (рис. 16б). Так как $AB \leq CD$,то и в этих случаях общая площадь будет увеличиваться.

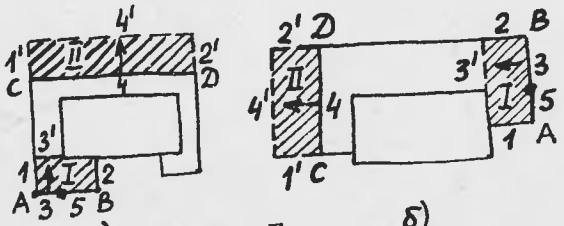
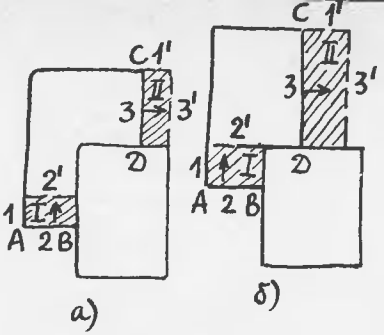


Рис 15.

Если второй участок примыкает к первому с одной стороны (рис. 16б), то можно, не меняя размеров первого забора, так его сдвинуть (и,может быть, еще повернуть на 90^0), чтобы сторона второго забора стала продолжением меньшей стороны первого забора; при этом длина второго забора уменьшится (на длину части I).

Пусть второй участок прикрывает меньшую сторону первого (рис. 16в), причем $AB \leq CD$. Повернем первый забор на 90^0, как показано на рис. 17 , затем передвинем части I,2,3 (в случае , если часть 1 выступает за $P'Q'$) в положения $1', 2', 3'$. Это можно сделать, так как $BP' \leq QP' = NM'$. Площадь, охватываемая заборами, не уменьшится, так как $AB \leq CD$.



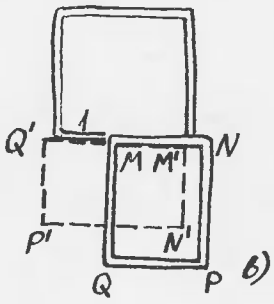


Рис 16

Далее, действуя, как показано на рис $а, б, в$, добиваемся того, чтобы сторона $Q'M'$ была прикрыта полностью вторым участком или чтобы второй участок примыкал только к стороне $Q'M'$.

Рассмотрим теперь случай, когда большая сторона закрыта полностью, а меньшая – частично или полностью (рис. 18), причем, как и прежде, $AB \leq CD$. Докажем, что $AB < \frac{EC}{2}$.

Действительно, т.к. $QM \geq \frac{a}{4}$, то из того, что $AB \geq \frac{EC}{2}$, следовало бы, что $AB \geq QM \geq \frac{a}{4}$, что $CD \geq AB \geq \frac{a}{4}$, что $AE \geq CD \geq \frac{a}{4}$, что $AB+AE+EC+CD = AB+AE+AB+$ $+QM+CD \geq \frac{5a}{4} > a$. Противоречие. Поэтому второй забор можно перестраивать как показано на рис. 18 : площадь при этом не уменшится , так как основание ЕС прямоугольника II минимум в два раза превосходит величину основания АВ прямоугольника I, а высота ровно вдвое меньше.

Если второй забор примыкает к большей стороне первого участка, не полностью прикрывая ее, то его можно перестроить так, чтобы охватываемая им площадь возросла и чтобы новый

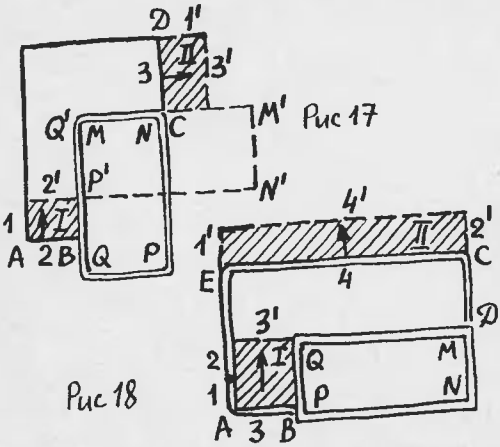


Рис 17

Рис 18

забор полностью закрывал эту сторону (рис. 19). Действительно, $MN < \frac{a}{2}$, $DE = MN < \frac{a}{2}$; значит, $AD > \frac{a}{4}$ и $AD > \frac{BC}{2}$. Таким образом, основание AD участка II больше половины основания BC участка I, а высота ровно вдвое больше.

Из предыдущего следует, что если размеры первого забора фиксированы, то второй забор всегда можно перестроить так, чтобы он охватывал большую площадь и имел вид, изображенный на рис. 20 или на рис. 13 .

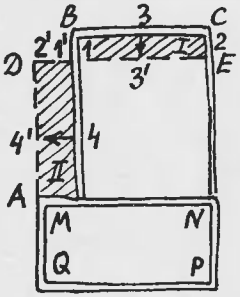


Рис 19

Далее будем рассматривать два случая: I^0. Большая сторона первого участка $MN > \frac{a}{3}$. Перестроим забор, как показано на рис. 20 . Так как $BC \geq \frac{a}{3}$, то $AB \leq \frac{a}{3}$, а $DC = MN \geq \frac{a}{3}$, откуда следует, что площадь участка II больше площади участка I .

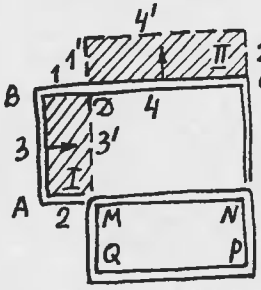


Рис 20

Теперь докажем, что общая площадь все же не больше $\frac{a^2}{6}$. С этой целью покажем, как можно перестроить заборы, чтобы общая площадь возросла, а участки стали такими ,как на рис. 13 .

Т.к. $CA > \frac{A}{3}$, а $AB < \frac{A}{3}$,то площадь участка I меньше площади участка II . Т.к. $BD < \frac{a}{6}$, а $CE = \frac{a}{3}$,то

7-2119

площадь участка $\overline{IV}$ больше площади отпавшего участка $\overline{III}$. Все доказано.

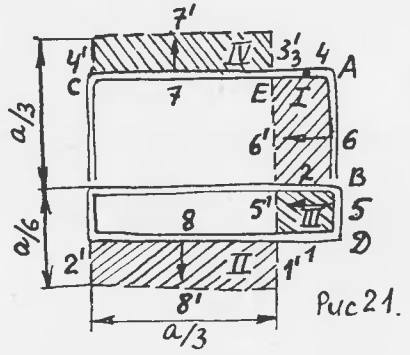


Рис 21.

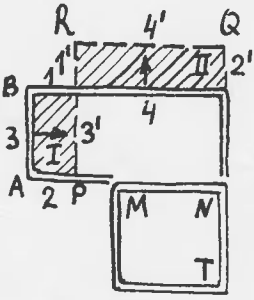


Рис 22.

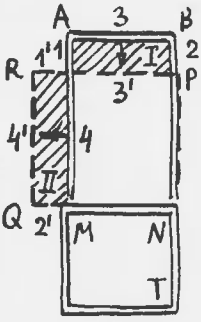


Рис 23.

2^0. Пусть теперь $MN < \frac{a}{3}$. В этом случае второй забор можно перестроить так, что второй участок станет квадратным, а его площадь увеличится.

Действительно, $QRPN$ квадрат (рис 22 и 23), поэтому $AB < RP = RQ$ и, следовательно, площадь участка $\overline{I}$ меньше площади участка $\overline{II}$.

Итак, можно второй участок считать квадратным. Вычислим общую площадь, огороженную заборами в этом случае (рис. 23).

Пусть длина MN равна $\frac{a}{3} - x$. Тогда $NT = \frac{a}{6} + x$

Ясно, что $4RQ = a + (\frac{a}{3} - x) = \frac{4a}{3} - x$,

откуда $RQ = \frac{4a - 3x}{12}$. Общая площадь участков

$$S = \left(\frac{a}{3} - x\right)\left(\frac{a}{6} + x\right) + \frac{(4a-3x)^2}{144} = \frac{a^2}{6} - \frac{15x^2}{16} \le \frac{a^2}{6}$$

Мы видим, что и в этом случае общая площадь не превосходит $\frac{a^2}{6}$.

Задача № 67. В первой строке таблицы выписаны четыре числа I, I9, I96, I965, под каждым числом пишется сумма всех чисел первой строки минус это число, умноженное на 2. Таким же способом строится по второй строке третья и т.д. Вычислить число, стоящее на первом месте в I965 строке.

Решение. Найдем вторую и третью строки:

I.	a	b	c	d
2.	$b+c+d-a$	$a+c+d-b$	$a+b+d-c$	$a+b+c-d$
3.	$4a$	$4b$	$4c$	$4d$

Отсюда видно, что каждая строка в 4 раза меньше следующей за ней через одну. На 1965-ом месте будет стоять 4^{982}.

Задача № 68. На каждой стороне выпуклого четырехугольника, как на диаметре, строится окружность. Доказать, что каждая точка, лежащая внутри четырехугольника, попадает внутрь или на границу хотя бы одного из кругов.

Решение. Пусть АВСД - данный четырехугольник, М - точка внутри его. Соединим точку М с вершинами четырехугольника. Углы АМВ, ВМС, СМД и ДМА в сумме составляют 360^0, следовательно, по крайней мере, один из них не меньше 90^0. Пусть, например, $\angle AMB \geqslant 90^\circ$. Тогда точка М лежит внутри или на границе круга К с диаметром АВ, т.к. из теоремы о величине угла с вершиной вне круга следует, что если угол опирается на диаметр АВ круга К, а его вершина находится вне круга К, то такой угол - острый.

Задача № 69. Пусть внутри угла с вершиной А дана точка М. Указать на сторонах угла точки В и С так, чтобы $AB=AC$ и чтобы $MB+MC$ принимала наименьшее значение.

Решение. Пусть M_1 - точка, симметричная М относительно биссектрисы данного угла AD, M_2 - точка, симметричная М относительно ближайшей к М стороны угла, B_1 и C_1 - произвольные точки на сторонах данного угла, такие что $AB_1=AC_1$ (рис. 24).

Так как точки B_1 и C_1 симметричны относительно AD, то $B_1M=C_1M_1$. Кроме того, $MC_1=C_1M_2$. Поэтому $MB_1+MC_1=M_1C_1+M_2C_1$. В треугольнике $M_1C_1M_2$

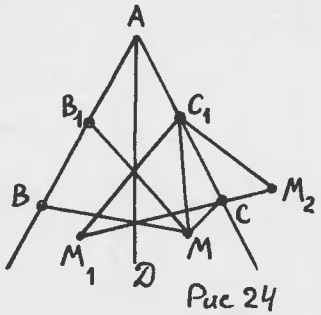


Рис 24

сторона M_1M_2 не превосходит $M_1C_1+M_2C_1$. Следовательно, величина MB_1+MC_1 принимает наименьшее возможное значение, равное длине M_1M_2, когда точка C_1 лежит на M_1M_2. Отсюда ясно, как найти точки B и C, удовлетворяющие условию задачи: точка C лежит на пересечении отрезка M_1M_2 и стороны угла, а точку B можно найти, отложив на другой стороне угла отрезок $AB=AC$.

Задача № 70. На классной доске написаны числа 1,2,3... 1966. Разрешается стереть любые два числа и записать вместо них их разность. Очевидно, что многократным повторением этой операции можно добиться того, что на доске останется одно число. Доказать, что это число не может быть нулем.

Решение. Если два числа имеют одинаковую четность, то их разность- число четное; если одно из чисел четное, а другое - нечетно, то их разность- число нечетное. Значит, после каждой операции количество нечетных чисел сохраняется или уменьшается на два.

Вначале на доске написаны 983 нечетных числа, после каждой операции остается нечетное число нечетных чисел, поэтому на доске не может остаться число нуль - в этом случае оказалось бы, что количество нечетных чисел равно нулю.

Задача № 71. В единичный квадрат бросили 51 точку. Доказать, что какие-нибудь три из них обязательно лежат внутри некоторого круга радиуса 1/7.

Решение. Разобьем квадрат на 25 квадратиков со стороной 1/5 (рис. 25). Если бы на каждый квадратик упало не более двух точек, то на все 25 квадратиков упало бы не более 50 точек. Поэтому найдется такой квадратик, на который упали три точки (мы говорим, что точка упала на квадратик даже тогда, когда она упала на его сторону). Докажем,

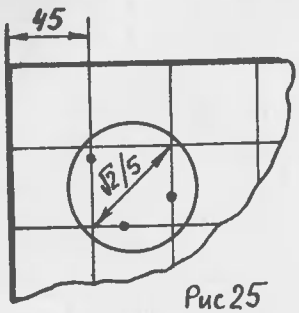


Рис 25

что весь квадратик (и упавшие на него точки) можно покрыть кругом радиуса 1/7. Достаточно доказать, что диаметр этого круга равный 2/7, больше диагонали квадратика, равной $\frac{\sqrt{2}}{5}$.
В самом деле, $\sqrt{2} > 1{,}4 = \frac{7}{5}$, т.е. $\frac{\sqrt{2}}{7} > \frac{1}{5}$. Умножив обе части последнего неравенства на $\sqrt{2}$, получим $\frac{2}{7} > \frac{\sqrt{2}}{5}$.

Задача № 72. Все натуральные числа произвольным образом разбиты на две группы. Доказать, что хотя бы в одной из них найдутся три числа, одно из которых является средним арифметическим двух других.

Решение I. способ (принадлежит ученику 22 школы Валентину Шехтману). Поместим в натуральном ряду чисел 1,2,... над каждым числом кружок и окрасим его в белый цвет, еели число попало в первую группу, и в черный- если во вторую. Получится цепочка из белых и черных кружков.

Если $a = \frac{b+c}{2}$, то $b-a = a-c$, т.е. в этом случае между кружками b и a столько же кружков, сколько и между кружками a и c.

В задаче утверждается, что в любой цепочке есть три кружка одного цвета, расположенные именно таким образом. Докажем это утверждение.

Если числа 1,3,5 попали в одну группу, то задача решена, если же в разные, то среди чисел от одного до пяти есть такие два числа n и $n+1$, которые попадут в одну группу, например, в первую.

В соответствующей цепочке над числами n, $n+1$, стоят белые кружки (рис. 26).

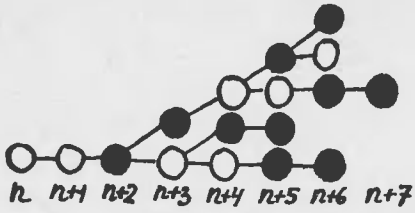


Рис 26

Докажем, что как бы мы ни продолжали эту цепочку, в ней рано или поздно появятся три кружка одного цвета, стоящие через одинаковый интервал.

Если кружок над $n+2$ белый, то это действительно так. Рассмотрим цепочки, в которых он черный. Над $n+3$ можно ставить и белый кружок, и черный - мы рассмотрим цепочки обоих видов.

Будем продолжать строить наши цепочки таким образом, пока это возможно. Получатся, как это видно из рис. 26 , всего пять различных цепочек.

Если любую цепочку продолжить любым способом, то получится цепочка, для которой утверждение задачи верно. Поэтому оно справедливо во всех случаях.

2 способ (принадлежит ученикам 2-й школы Александру Каменскому и Борису Фейгину).

Если три числа 5,7,9 оказались в одной группе, то все доказано.

Пусть они находятся в разных группах. Будем ту группу, в которой оказались два из этих числа, называть первой, а сами эти числа обозначим a и b . Очевидно, $2a-b>0$ и $2b-a>0$. Если хотя бы одно из чисел $2a-b$, $2b-a$ окажется в первой группе, то утверждение справедливо, так как $\frac{a+(2b-a)}{2}=b$ и $\frac{b+(2a-b)}{2}=a$.

Предположим теперь, что числа $2a-b$ и $2b-a$ оба находятся во второй группе.

Если их среднее арифметическое, равное $\frac{a+b}{2}$ (оно, кстати, является целым числом), находится во второй группе, то все доказано. Если же число $\frac{a+b}{2}$ окажется в первой группе, то утверждение также справедливо, т.к. в первой

группе находятся числа a и b .

3 способ (принадлежит ученику 2-й школы Пухову Александру).

Если в одну из групп попало три последовательных натуральных числа n , $n+1$, $n+2$,то утверждение справедливо.

Предположим, что это не так. Допустим, что в одной из групп найдутся три числа, $n_1 < n_2 < n_3$," соседи" которых по натуральному ряду (n_1-1 , n_1+1 , n_2-1 и т.д.) находятся в другой группе.

Среди чисел n_1, n_2, n_3 есть два числа, имеющие одинаковую четность. Пусть это, например, числа n_1 и n_2 .

Если число $\frac{n_1+n_2}{2}$(очевидно, целое) находится в первой группе, то утверждение задачи выполняется для чисел n_1, n_2 и $\frac{n_1+n_2}{2}$; если же это число попало во вторую группу, то утверждение задачи выполняется для чисел n_1-1 , n_2+1 , $\frac{n_1+n_2}{2}$, находящихся во второй группе. Предположим, наконец, что в каждой группе есть не более двух чисел, соседи которых находятся в другой группе. Если n – самое большее из этих чисел (может быть, $n=1$ или даже $n=0$, если таких чисел нет), то далее числа располагаются так ("парами"): $n+1, n+2$ – в одной группе; $n+3$. , $n+4$ – в другой ; $n+5$, $n+6$ – снова в первой и т.д.

При этом в первой группе оказываются числа $n+1$, $n+5$, $n+9$, для которых выполняется утверждение задачи.

Задача № 73. На окружности даны 1966 точек, занумерованных числами от 1 до 1966. Составляются всевозможные выпуклые многоугольники с вершинами в этих точках. Каких многоугольников больше: тех, для которых первая из заданных точек является вершиной или тех, для которых она вершиной не является ?

Решение. Множество всех выпуклых многоугольников с вершинами в данных точках, для которых точка I является вершиной, обозначим через M_1, а множество тех многоугольников, для которых она вершиной не является, обозначим через M_2.

Из каждого многоугольника, принадлежащего M_2, можно получить многоугольник из множества M_1, если к вершинам первого многоугольника добавить еще одну вершину- точку I. Таким образом, различные многоугольники множества M_2 "порождают" различные многоугольники множества M_1.

Однако таким способом нельзя получить принадлежащие множеству M_1 треугольники. Следовательно, в множестве M_1 многоугольников больше. x/

Задача № 74. Десять пятаков разложены в виде замкнутой цепочки (т.е. первый касается второго, второй - третьего и т.д., десятый - первого). Одиннадцатый пятак катится без скольжения по внешней стороне цепочки, касаясь по очереди каждого из десяти пятаков. Сколько оборотов сделает этот пятак, вернувшись в исходное положение ? (доказать, что число оборотов не зависит от формы цепочки).

Решение. Докажем, что если пятак К (рис. 27), обкатывая неподвижный пятак S, прошел по его окружности дугу $AB=\alpha^\circ$, то сам он при этом повернулся на угол $2\alpha^\circ$ вокруг своей оси O_1. Действительно, если бы

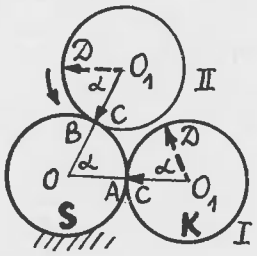


Рис 27

x/ О множествах можно прочитать в книгах Г.Радемахера и О.Теплица " Числа и фигуры" и Н.Я.Виленкина "Рассказы о множествах".

пятак К во время движения касался пятака S все время одной и той же своей точкой С, то перейдя из положения I в положение II, он повернулся бы на угол α°, как это ясно из чертежа (рис. 27).

В действительности же в положении II в точке касания оказывается точка D, такая, что $\angle DO_2C = \alpha^\circ$. В общей сложности, пятак К повернулся на угол $\alpha^\circ + \alpha^\circ = 2\alpha^\circ$ вокруг своей оси.

Таким образом, чтобы найти угол, на который повернулся одиннадцатый пятак, надо определить, сколько (дуговых) градусов составляет его путь по десяти пятакам, и полученный результат удвоить.

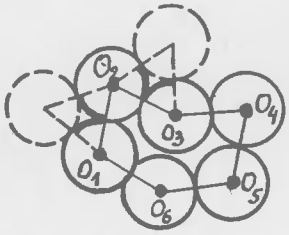


Рис 28

Соединив центры соседних пятаков $O_1, O_2, \ldots$ отрезками, получим некоторый десятиугольник, не обязательно выпуклый (см. рис. 28, на котором для простоты изображена цепочка, состоящая из шести пятаков).

При движении одиннадцатый пятак не может касаться дуг, лежащих внутри десятиугольника, а также дуг величиной по 60°, примыкающих к точках касания извне (на рис. 28 жирной линией показаны 4 таких дуги). Общая сумма этих последних дуг равна $60^\circ \cdot 2 \cdot 10 = 1200^\circ$. Как легко видеть из чертежа (рис. 28), сумма дуг внутри десятиугольника равна сумме его внутренних углов, являющихся центральными углами для этих дуг.

Сумма внутренних углов любого n - угольника (не обязательно выпуклого) равна $180^\circ \cdot n - 360^\circ$ (доказательство см. в книге Л.И.Головиной и И.М.Яглома " Индукция в геометрии", Физматгиз, М., 1961, стр. 13-15,) Следовательно, "дуговой путь" одиннадцатого пятака равен $360^\circ \cdot 10 - 1200^\circ - (180^\circ \cdot 10 - 360^\circ) = 960^\circ$. Вернувшись в исходную точку, он совершит $\frac{960^\circ \cdot 2}{360} = 5\frac{1}{3}$ оборота.

9-2119

8-е КЛАССЫ . ТРЕТИЙ ЦИКЛ

А.Б.КАТОК и В.И.ЛОМОНОСОВ

ПОБЕДИТЕЛИ КОНКУРСА 8-х КЛАССОВ

I премия	Черкасский Борис	шк. № 2	гр.Е
	Гилинский Евгений	шк. № 2	гр.Е
2 премия	Иванов Александр	шк.№ 704	гр.Е
3 премия	Колгин Анатолий	шк. № 400	гр.В
	Марголин Андрей	шк. № 178	гр.А

Решения задач.

Задача № 51. Дана правильная треугольная пирамида (правильный тетраэдр). Как его нужно расположить в пространстве, чтобы его перпендикулярная проекция на данную плоскость имела максимальную площадь ?

Решение. Примем ребро тетраэдра за I. Опустим перпендикуляры из вершин тетраэдра на плоскость.

Основания перпендикуляров при этом образуют либо выпуклый четырехугольник, либо треугольник, внутрь которого попадает четвертая вершина тетраэдра.

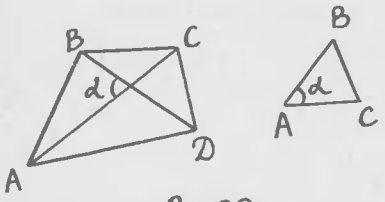


Рис 29

В первом случае у четырехугольника все стороны и диагонали будут не больше I, так как они являются проекциями единичных ребер. Очевидно, что

$$S_{ABCD} = \frac{1}{2} AC \cdot BD \cdot \sin\alpha$$

Наибольшая площадь, как видно из написанной формулы, будет в случае $AC = BD = \sin\alpha = 1$.

Такая проекция получается, если противоположные ребра тетраэдра параллельны плоскости, при этом $S_{ABCD} = \frac{1}{2}$.

Во втором случае получается треугольник ABC, стороны

которого не больше I,

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot BC \cdot \sin\alpha \le \frac{1}{2}$$

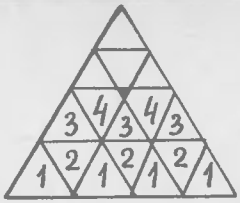


Рис30

Таким образом, максимальная проекция найдена. Можно еще показать, что во втором случае равенство площади I/2 не достигается, поэтому мы нашли все наибольшие проекции.

Задача № 52. Каждая сторона правильного треугольника разделена на n равных частей и через точки деления проведены отрезки, параллельные сторонам треугольника, так, что треугольник оказался разделенным на маленькие треугольники. В каждый из этих треугольников записано число +I или - I, причем число, стоящее в любом треугольнике, равно произведению чисел, стоящих в смежных треугольниках. Доказать, что в угловых треугольниках стоят одинаковые числа.

Решение. Обозначим через S_k произведение чисел в треугольниках K-го ряда. Так как каждый треугольник 4-го ряда соприкасается с двумя треугольниками третьего ряда, а треугольник второго ряда только с одним, то $S_3 = S_4^2 \cdot S_2$, но $S_4^2 = 1$, значит $S_2 = S_3$. (См. рис.30).

Аналогично, $S_2 = S_3 \cdot \frac{S_1}{a}$, где a - произведение крайних чисел первого ряда. Так как $S_2 = S_3$, то $\frac{S_1^2}{a} = 1$ и $a = 1$. Отсюда любые два крайних члена равны, т.е. все три равны.

Заметим, что приведенные рассуждения верны, если сторона разбита не менее, чем на три части. Тривиальный случай, когда сторона разбита на две части, мы предоставляем читателю для самостоятельного разбора.

Задача № 53. См.задачу № 53 для 7-х классов.

Задача № 54. Из точки А, не лежащей на данной прямой ℓ, проведено нечетное число различных отрезков, концы

которых лежат на прямой ℓ . Можно ли передвинуть эти отрезки параллельно самим себе так, чтобы они образовали замкнутый многоугольник ?

Решение. Рассмотрим прямую m , перпендикулярную прямой ℓ , как числовую ось и отметим на каждом из отрезков начало и конец, а затем вычислим проекции этих ориентированных отрезков на нашу числовую ось.

При параллельном переносе отрезков величины соответствующих проекций не меняются. Если бы отрезки $S_1, \dots S_{2n-1}$ можно было бы сложить в замкнутый многоугольник $B_1B_2 \dots B_{2n-1}$, то отметив на каждом из отрезков $S_1, \dots, S_{2n-1}$ начало и конец так, чтобы этот отрезок перешел в сторону $B_i B_{i-1}$ или $B_{2n+1}B_1$ многоугольника, мы увидим, что алгебраическая сумма проекций отрезков на ось равна нулю.

С другой стороны, абсолютная величина проекции каждого из отрезков на прямую одна и та же, так как отрезков нечетное число, сумма проекций не может быть равна нулю, как бы мы ни отмечали начало и конец на каждом отрезке.

Задача № 55. Доказать, что любое натуральное число можно представить в виде суммы нескольких различных членов последовательности Фиббоначчи (последовательность Фиббоначчи определяется так: $a_1=1$, $a_2=1$, $a_k=a_{k-2}+a_{k-1}$ при $n\neq 1,2$).

Решение. Доказательство проведем методом математической индукции, а именно ,докажем, что любое натуральное число $m \le A_n$ можно представить в виде суммы нескольких различных чисел A_k, где $k \le n$.

При $n=1$ утверждение очевидно $1=1$.

Пусть любое число $m \le A_\ell$,где $\ell < n$, можно представить в виде суммы A_k, где $k \le \ell$. Пусть теперь $m \le A_n$. Если $m \le A_{n-1}$, то его, по предположению индукции, можно представить в виде суммы A_k, $k \le n-1$, при $\ell = n-1$.

Рассмотрим $A_{n-1} < m \le A_n$.Имеем: $m = A_{n-1} + m'$, где $m' \le A_{n-2}$.Но по предположению индукции,при $e = n-2$ m' может быть представлено как сумма различных чисел A_k при $k \le n-2$.Прибавляя к этой сумме A_{n-1} ,получаем искомое представление для A_n.

Задача № 56. Некоторый I7-угольник при повороте вокруг некоторой точки O на угол α совмещается с собой.Доказать, что I7-угольник - правильный.

Решение. Пусть A' - ближайшая из вершин многоугольника, в которую может перейти вершина A при повороте на угол $\varphi = k\alpha$ / k - любое натуральное число/.Покажем,что внутри угла AOA' нет других вершин многоугольника.

Предположим противное,то есть что внутри угла AOA' есть вершины $B_1, B_2, \ldots, B_p$.Тогда внутри угла $A'OA''$ (A'' -вершина,в которую переходит A' при повороте вокруг точки O на угол φ) находятся вершины $B_1', B_2', \ldots, B_p'$,в которые переходят при этом повороте соответственно вершины $B_1, B_2, \ldots, B_p$. Число вершин многоугольника,таким образом,равняется $(p+1)\frac{2\pi}{\varphi}$, то есть не равно простому числу при $p \neq 0$.Так как I7 - число простое,то $p = 0$.

Итак,очевидно,что при последовательных поворотах на угол φ вокруг точки O вершина A может перейти в любую вершину многоугольника (при некотором k),откуда и следует,что многоугольник - правильный.

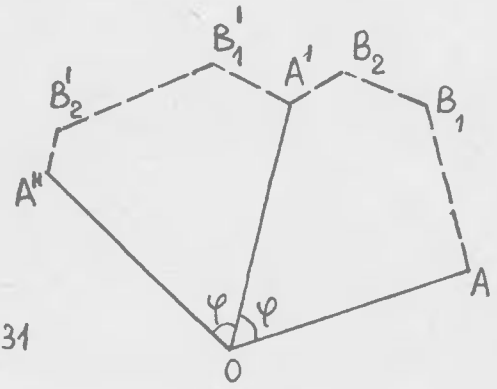


Рис 31

10-2118

Задача № 57. На доске 10х10 клеток для игры "в морской бой" расположен четырехклеточный "корабль". Какое наименьшее число "ударов" нужно произвести, чтобы наверняка попасть в "корабль"? (Указать способ нанесения данного числа "ударов" и доказать, что при меньшем числе ударов всегда можно расположить "корабль" так, что он не будет обнаружен).

Решение.

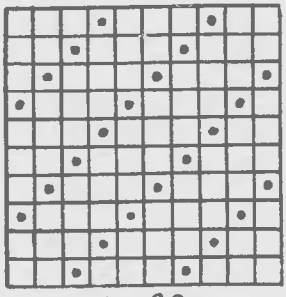


Рис 32

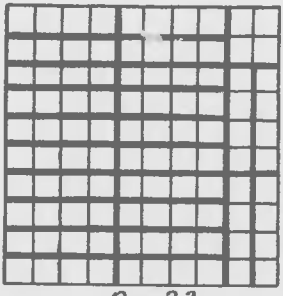


Рис 33

Из рис. 32 видно, что 24 залпов хватает, чтобы разбить любой корабль, т.к. любой четырехклеточный корабль содержит одну из отмеченных клеток.

Т.к. в каждый из начерченных на рис. 33 двадцати четырех кораблей нужно дать хотя бы по одному залпу, то двадцати трех ударов может не хватить.

Задача № 58. Длина наибольшей из сторон и диагоналей выпуклого шестиугольника равна 2. Доказать, что в этом шестиугольнике найдется сторона или диагональ, длина которой не превосходит 1.

Приведенное условие задачи неверно. Опровергающий пример постройте сами.

Задача № 59. Доказать, что не существует целых чисел A, B, C и D, удовлетворяющих равенствам:
$ABCD-A=1966$, $ABCD-B=966$, $ABCD-C=66$, $ABCD-D=6$

Решение. $ABCD-D=D(ABC-1)$, значит, D и $ABC-1$ – делители шести. Вычтем из первого равенства последнее. Так как $D-A=1960$ и $D\le 6$, то $A\le -1954$ и, значит, $ABC-1$ не может быть делителем числа шесть.

Задача № 60. См. задачу № 65 для 7 – ых классов.

Задача № 61. Доказать, что среди 79 последовательных натуральных чисел всегда найдётся число, сумма цифр которого делится на 13. Привести пример 78 последовательных чисел, суммы цифр которых не делятся на 13.

Решение. Рассмотрим сорок последовательных чисел: $10k, 10k+1, \dots, 10(k+3)+9$, где $0 \le k \le 6$. Выберем из них 13 чисел: $10k, 10k+1, \dots, 10k+9, 10(k+1)+9, 10(k+2)+9, 10(k+3)+9$. Очевидно, если делить сумму цифр каждого из них на 13, то полученные при этом остатки примут все значения от 0 до 12.

Теперь рассмотрим последовательность: $n, n+1, \dots, n+78$, здесь n – любое натуральное число. Могут встретиться два случая: либо число сотен у всех чисел в этой последовательности одно и то же, либо оно принимает два значения.

В первом случае среди них есть сорок последовательных чисел, две последние цифры которых меняются от 30 до 69; во втором – либо от 60 до 99, либо от 00 до 39.

В каждом из этих случаев можно выбрать среди указанных сорока чисел такое, что если сложить остатки от деления на 13 суммы всех цифр, кроме двух последних, и суммы двух последних цифр, то получится 13. Это число и будет искомым.

А вот пример последовательности из 78 чисел, о которой шла речь в условии задачи:

$$\underbrace{99\dots96}_{8}1, \dots, 1\underbrace{00\dots0}_{8}38.$$

Задача № 62. При каких n существуют положительные числа $x_1, x_2, \dots, x_n$, удовлетворяющие равенствам:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + \dots + x_n = 3, \\ \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \dots + \frac{1}{x_n} = 3. \end{cases}$$

Решение.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + \dots + x_n = 3, \\ \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \dots + \frac{1}{x_n} = 3. \end{cases}$$

Сложим почленно равенства:

$$x_1 + \frac{1}{x_1} + \dots + x_n + \frac{1}{x_n} = 6.$$

Известно, что при $x > 0$ $x + \frac{1}{x} \geq 2$. Таким образом, $n \leq 3$. При $n=3$ подходит $x_1 = x_2 = x_3 = 1$; при $n=2$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 3, \\ \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = 3. \end{cases}$$

Откуда $x_1 = \frac{3+\sqrt{5}}{2}$, $x_2 = \frac{3-\sqrt{5}}{2}$. При $n=1$ решений, очевидно, нет.

КОНКУРС ВЕЧЕРНЕЙ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ШКОЛЫ.

В конкурсе могут принимать участие все школьники 7-10 классов. Решения следует представлять в письменном виде работникам ВМШ или присылать почтой по адресу: Москва В-234, МГУ. мехмат. комната 12-22, Б.В.Григорьеву (для 9-10-х классов) или М.И.Клиорину (для 7-8-х классов).

7- КЛАСС

1. 20 точек расположены следующим образом (см. рис 34)

Рис 34

Сколько можно построить различных квадратов с вершинами в этих точках ? Какие 6 точек надо удалить, чтобы нельзя было построить ни одного квадрата с вершинами в оставшихся точках ?

2. Сеть автобусных маршрутов в городе Лиссе устроена так, что : а) на каждом маршруте имеется К остановок; б) любые два маршрута либо вовсе не имеют общих остановок, либо имеют только одну общую остановку. Какое наибольшее число маршрутов может быть в этом городе, если известно, что имеется всего К различных остановок ? (7-е классы решают задачу при К=3, а 8-е - классы - при К=4.).

3. Стекло имеет форму квадрата с площадью 1, на обеих сторонах этого стекла нарисованы карты, по 10 стран на каждой карте. Страны на одной стороне стекла закрашены 10-ю различными красками. Требуется закрасить страны на противоположной стороне теми же десятью красками так, чтобы : а) разные страны были закрашены разными красками; б) общая площадь участков стекла, закрашенных с обеих сторон одной и той же краской, была не меньше 0,1. Всегда

ли это можно сделать ?

4. В некоторой точке прямой находится частица. За I секунду она делится пополам и половинки расходятся в противоположные стороны на расстояние I. За следующую секунду образовавшиеся частицы снова делятся пополам и половины расходятся в противоположные стороны на расстояние I от прежних положений. Сталкиваясь, любые две частицы уничтожаются, так что, например, через две секунды останется только две частицы. Сколько частиц останется через I29 секунд ?

5. Доказать, что не существует таких простых A,B,C, D, что $A^2+B^2+C^2+D^2=ABCD+4$.

6. Шестизначное число называется счастливым, если сумма первых трех цифр его равна сумме последних трех цифр. Доказать, что сумма всех счастливых чисел делится на I3.

7. Даны шар радиуса I и точка A на поверхности этого шара. Указать такую систему окружностей, чтобы:

а) никакие 2 окружности не пересекались;

б) через каждую точку шара, кроме точки A, проходила бы окружность;

в) каждая окружность целиком принадлежит шару.

8. Доказать, что число $\underbrace{11\ldots1}_{3^{11}\text{ раз}}$ делится на 3^{11}.

8-е КЛАССЫ.

I. См. задачу № 2 для 7-х классов.

2. См. задачу № 3 для 7-х классов.

3. На сторонах произвольного треугольника ABC, имеющего площадь I, выбрано по точке. Соединяя эти точки, отсечем от треугольника ABC три треугольника, прилегающие к вершинам. Доказать, что хотя бы один из этих треугольни-

ков имеет площадь не больше I/4.

4. Решить уравнение

$$x = 1 - 1966\,(1 - 1966\,x^2)^2$$

(Примечание. Уравнение четвертой степени имеет не более четырех корней).

5. В треугольнике АВС выбрана точка О. На продолжении отрезка АО откладывается отрезок OA', равный I/2 отрезка АО. Аналогичные построения проделываются с отрезками ВО и СО. Могут ли вое три точки A', B', и C' лежать внутри треугольника АВС ?

6. Все точки плоскости разбиты на три класса. Доказать, что хотя бы в одном из этих классов найдутся две точки на расстоянии I см.

7. Дана окружность О, ее хорда АВ и точки С и Д, лежащие на окружности по одну сторону от этой хорды. Построить такую точку Е, лежащую на окружности О, чтобы угол ДЕС высекал на хорде АВ отрезок заданной длины.

8. Указать такую систему окружностей в пространстве, чтобы:

I/ никакие 2 окружности не пересекались,

2/ через каждую точку пространства проходила бы окружность.

9. Доказать, что число $\underbrace{11\ldots1}_{3^n \text{ раз}}$ делится на 3^n.

IO. Шестизначное число называется счастливым, если сумма первых трех цифр равна сумме последних трех цифр. Доказать, что сумма всех счастливых чисел делится на I3.

9- IO-е КЛАССЫ

1.См.задачу № 2 для 7 классов.
2.См.задачу № 3 для 7 классов.
3.См.задачу № 4 для 8 классов.

4. Торт имеет форму правильного семиугольника. На каждой стороне семиугольника взято по точке, и торт разрезан по прямым, соединяющим последовательно эти точки. При каком выборе точек наименьший из отрезанных треугольных кусков будет иметь максимальную площадь ?

5. Обозначим через $\rho_k(M)$ расстояние точки M от вершины A_k равностороннего треугольника $A_1A_2A_3$. Пусть a_1, a_2, a_3 – произвольные положительные числа. Построить точку M_0, в которой выражение $a_1\rho_1(M)+a_2\rho_2(M)+a_3\rho_3(M)$ принимает наименьшее значение.

6. На сторонах $A_1A_2, A_2A_3, A_3A_4, A_4A_1$ выпуклого четырехугольника $A_1A_2A_3A_4$ выбраны точки B_1, B_2, B_3, B_4. При этом прямые A_1A_3, B_1B_2, B_4B_3 пересекаются в точке P_1, а прямые A_2A_4, B_1B_4, B_2B_3 пересекаются в точке P_2. Доказать, что произведение длин отрезков $A_1B_1, A_2B_2, A_3B_3, A_4B_4$, равно произведению длин отрезков $B_1A_2, B_2A_3, B_3A_4, B_4A_1$.

7. Доказать, что

$$\frac{1}{44} < \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdots\frac{999}{1000} < \frac{1}{36}.$$

8. Дан треугольник ABC и точка O внутри его. Доказать, что хотя бы один из углов $\angle OAB, \angle OBC, \angle OCA$ не больше 30°.

9. Диаметром пространственного тела называется расстояние между двумя самыми удаленными друг от друга точками этого тела. Имеется выпуклое тело такое, что через каждую точку его границы можно провести единственную плоскость, не имеющую с телом других точек. Доказать, что такое тело можно разбить на 4 куска меньшего диаметра.

10. В вершинах правильного n-угольника написаны целые числа $a_1, \ldots, a_n$, причем $a_1+\cdots+a_n=0$. Перевоз-

кой называется вычитание единицы из числа, стоящего в некоторой вершине и прибавление ее к числу, стоящему у одной из соседних вершин. Какое минимальное чиоло перевозок нужно сделать, чтобы все числа, стоящие у вершин многоугольника стали равны нулю.

II.На каждой клетке бесконечной шахматной доски со стороной клетки в I см стоит по фишке.Фишки снимают с доски и переставляют в новом порядке.Оказалось,что:

а/две фишки,стоявшие ранее в соседних клетках,снова оказались в соседних клетках;

б/ни одна фишка не сдвинулась от своего начального положения более,чем на I00 см.

Как оказались расставлены фишки после перестановки /найти все возможные расположения/?

Примечание.Соседними считаются клетки,граничащие по некоторой линии.

I2.Пусть $P(x)$ и $Q(x)$ – два многочлена,такие что если в некоторой точке $P(x)$ принимает целое значение,то и $Q(x)$ в этой точке принимает целое значение,и наоборот.Доказать, что или $P(x)+Q(x)$,или $P(x)-Q(x)$ постоянно.

I3.Можно ли разбить правильный треугольник на конечное число неравных правильных треугольников,меньших его?

I4.Лабиринт имеет форму прямоугольника со сторонами 3м и 4м с проведенными диагоналями.В центре прямоугольника находится мышь,а в одной из его вершин–кошка.Ходы лабиринта слишком узки для того,чтобы кошка или мышь могли в них развернуться.Диагональные ходы слишком узки для кошки.В некоторый момент времени кошка и мышь начинают бегать по лабиринту:мышь – со скоростью I метр в сек.,кошка – I0 метров в сек.Может ли мышь убежать от кошки/мышь и кошка могут поворачивать только в узлах лабиринта/?

МАТЕРИАЛЫ ВСТУПИТЕЛЬНЫХ ЭКЗАМЕНОВ В ВУЗЫ В 1966 году.

По традиции мы публикуем материалы вступительных экзаменов в ведущие вузы.

Ниже приведены варианты письменного экзамена по математике, предложенные в 1966 году на механико-математическом факультете МГУ. На решение задач давалось 4 астрономических часа.

Вариант № 1.

1. В реку впадает приток. На притоке на некотором расстоянии от его устья расположен пункт А. На реке на таком же расстоянии от устья притока расположен пункт В. Время, которое требуется моторной лодке, чтобы доплыть от пункта А до устья притока и обратно, относится ко времени, которое требуется ей, чтобы от пункта В доплыть до устья притока и обратно, как 32:35. Если бы скорость моторной лодки была на 2 км/час больше, то это отношение было бы равно 15:16 , а если бы скорость моторной лодки была на 2 км/час меньше, то это отношение было бы равно 7:8. Найти скорость течения реки (расстояния измеряются вдоль притока и реки соответственно).

2. Решить неравенство:

$$5+2\cos 2x \leq 3\left|2\sin x-1\right|.$$

3. Шар радиуса r касается всех ребер треугольной пирамиды. Центр шара лежит внутри пирамиды на ее высоте на расстоянии $r\sqrt{3}$ от вершины. Доказать, что пирамида правильная. Найти высоту пирамиды.

4. Из гранита нужно вырубить постамент в форме прямоугольного параллелепипеда, высота которого должна быть равна диагонали основания, а площадь основания должна быть равна 4 $м^2$. При каком отношении сторон площадь поверхности поста-

мента будет наименьшая ?

5. Найти все значения a и b, при которых система уравнений

$$\begin{cases} \left|\frac{x^y-1}{x^y+1}\right| = a, \\ x^2+y^2=b. \end{cases}$$

имеет только одно решение (a, b, x, y – действительные числа, $x>0$).

Вариант № 2.

I. Из порта одним и тем же курсов вышли в разное время два корабля, идущие с одной и той же скоростью. Со второго корабля, идущего сзади, отправляется быстроходный катер, который догоняет первый корабль и сразу же возвращается на свой корабль. Катер находился в пути I3 час. 20 мин. Если бы перед выходом катера оба корабля одновременно уменьшили свою скорость на I0 км/час, то катер находился бы в пути II час. 40 мин., а если бы они одновременно увеличили свою скорость на I0 км/час, то катер находился бы в пути I7 час.30 мин. На сколько раньше вышел из порта первый корабль, чем второй ?

2. Решить неравенство:

$$\left(\log_{tgx} 3\right)^2 \le \log_{tgx}\left(3tg^2x\right).$$

3. Высота треугольной пирамиды равна h, сумма девяти плоских углов при всех вершинах основания равна α. Известно, что существует шар, касающийся всех боковых граней в точках пересечения их медиан. Доказать, что пирамида правильная. Найти радиус шара.

4. Нужно сделать воздушный змей в форме прямой призмы, имеющей основанием прямоугольный треугольник с гипотенузой, равной 50 см. Боковая поверхность этой призмы имеет площадь

0,96 м^2. Какими должны быть стороны треугольника основания, чтобы сумма длин всех ребер призмы была наименьшей ?

5. Найти все значения a , при которых система уравнений

$$\begin{cases} x^3 - ay^3 = \frac{1}{2}(a+1)^2, \\ x^3 + ax^2y + xy^2 = 1. \end{cases}$$

имеет хотя бы одно решение и всякое ее решение удовлетворяет уравнению $x+y=0$ (a, x, y - действительные числа).

Вариант № 3.

I. Туристы выехали на лодке из пункта А в пункт В ,расположенный ниже по течению реки. Первую половину пути АВ они шли на веслах, а потом включили мотор и прибыли в пункт В через 4 часа после выхода из А. Если бы весь путь из А в В они шли на веслах, то он занял бы у них 5 час.20 мин. На обратном пути из В в А они четверть пути ВА шли на веслах, а затем включили мотор и прибыли в пункт А через 7 часов после выхода из В . Сколько времени занял бы у них обратный путь, если бы весь этот путь они шли на веслах ?

2. Решить неравенство:

$$\left| 3^{tg\pi x} - 3^{1-tg\pi x} \right| \geq 2 .$$

3. Боковая поверхность треугольной пирамиды равна S , а периметр основания равен 3 а. Шар касается всех трех сторон основания в их серединах, а середины боковых ребер лежат на поверхности шара. Доказать, что пирамида правильная. Найти радиус шара.

4. Нужно изготовить коробку в форме прямоугольного параллелепипеда с площадь основания, равной I см^2. Сумма

длин всех ребер параллелепипеда должна быть равна 20 см. При каких размерах коробки площадь ее поверхности будет наибольшей?

5. Найти все значения a и b, при которых система уравнений

$$\begin{cases} xyz + z = a, \\ xyz^2 + z = b, \\ x^2 + y^2 + z^2 = 4 \end{cases}$$

имеет только одно решение (a, b, x, y, z – действительные числа).

Вариант № 4.

I. Из пункта А в пункт В выезжает автомобиль и одновременно из В в А с меньшей скоростью выезжает мотоцикл. Через некоторое время они встречаются, и в этот момент из В в А выезжает второй мотоцикл, который встречается с автомобилем в точке, отстоящей от точки встречи автомобиля с первым мотоциклом на расстоянии, равном 2/9 пути от А до В. Если бы скорость автомобиля была на 20 км/ час меньше, то расстояние между точками встречи равнялось бы 72 км и первая встреча произошла бы через 3 часа после выезда автомобиля из пункта А. Найти длину пути между А и В (скорости мотоциклов одинаковые).

2. Решить неравенство:

$$\left(\log_{\sin x} 2\right)^2 < \log_{\sin x}\left(4\sin^3 x\right).$$

3. Шар радиуса r касается боковых граней треугольной пирамиды в точках пересечения их высот. Сумма трех плоских углов при вершине пирамиды равна α. Доказать, что пирамида правильная. Найти длину бокового ребра пирамиды.

4. В основании прямой призмы лежит прямоугольный треугольник с площадью, равной 2 м^2, а высота призмы равна гипотенузе основания. Какими должны быть стороны оонования, чтобы боковая поверхность призмы была наименьшей ?

5. Найти все значения a, при которых система уравнений

$$\begin{cases} (x^2+1)^a + (b^2+1)^y = 2, \\ a + bxy + x^2 y = 1 \end{cases}$$

имеет хотя бы одно решение для любого значения b (a, b, x, y - действительные чиола).

Вариант № 5.

I. Русло реки разделяется длинной отмелью на две протоки одинаковой длины, но с разной скоростью течения. Две байдарки, имеющие в стоячей воде одинаковую скорость, выходят одновременно по течению: первая - в левую протоку, вторая - в правую. Первая байдарка прошла свою протоку на 5 минут быстрее, чем вторая. Затем они поднялись против течения теми же протоками, и при этом вторая байдарка прошла свой путь на 30 минут быстрее, чем первая. Если бы скорость байдарок в стоячей воде была в два раза больше, то обратный путь вторая байдарка прошла бы на 4 минуты быстрее, чем первая. За какое время первая байдарка прошла свою протоку, идя вниз по течению ?

2. Решить неравенство:

$$tg^2 x \leq |1 - 2\,ctg^2 x|.$$

3. Шар касается всех боковых граней треугольной пирамиды в центрах описанных около них окружностей. Каждый из трех плоских углов при вершине пирамиды равен α. Сумма длин боковых ребер равна $3b$. Доказать, что пирамида правильная. Найти радиус шара.

4. Требуется изготовить коробку в форме прямоугольного параллелепипеда. Площадь дна коробки должна быть равна 2 дм^2, а боковая поверхность – 18 дм^2. При каких размерах коробки сумма длин всех ее ребер будет наименьшей ?

5. Найти все значения a, при которых система уравнений

$$\begin{cases} 2^{|x|} + |x| = y + x^2 + a, \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$$

имеет только одно решение (a, x, y – действительные числа).

Вариант № 6.

I. В море с прямолинейным берегом впадают две реки с одинаковой скоростью течения. Посредине между их устьями расположен город А, на первой реке находится пункт В, а на второй реке – пункт С. Расстояние вдоль реки от В до устья этой реки равно расстоянию от А до устья реки, а расстояние от С до устья реки составляет 3/4 расстояния от А до устья реки. Из города А одновременно выходят две лодки; первая идет в В (вдоль берега моря и по реке), а вторая идет в С (также вдоль берега моря и по реке). Дойдя до пунктов В и С, лодки сразу поворачивают назад и идут соответственно в пункты С и В. Известно, что общее время, в течение которого первая лодка на пути из А в В, а потом в С, шла по морю, относится ко времени, в течение которого она шла по

рекам, как 45:47. Для второй лодки это отношение равно I6:I7. Какая из лодок первой пришла в свой конечный пункт – первая в C или вторая в B ?

2. Решить неравенство:

$$4^{\sin^2 \pi x} + 3 \cdot 4^{\cos^2 \pi x} \leqslant 8.$$

3. Шар касается всех трех боковых граней треугольной пирамиды $SABC$ в точках пересечения их биссектрис. Из вершины S проведены биссектрисы SD и SE в боковых гранях SAB и SAC. Угол DSE равен α, объем пирамиды равен V. Доказать, что пирамида правильная. Найти периметр основания.

4. В квадратном листе фанеры со стороной, равной I0 единицам длины, вырезано отверстие в форме прямоугольника, диагональ которого равна 5 единицам длины. Это отверстие по краям окантовано тонкой проволочной рамкой. Единица площади фанеры весит 2 г, а единица длины проволоки весит 7 г. Какими должны быть стороны отверстия, чтобы вес получившегося листа был наибольшим (единица площади есть площадь квадрата со стороной, равной единице длины)?

5. Найти все значения a, при которых система уравнений

$$\begin{cases} 2^{bx} + (a+1)by^2 = a^2, \\ (a-1)x^3 + y^3 = 1 \end{cases}$$

имеет хотя бы одно решение для любого значения b (a, b, x, y – действительные числа).

29 МОСКОВСКАЯ МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА.

А.А.ЛЕМАН

В 9 выпуске " Математической школы " были опубликованы задачи второго и третьего туров 29 Московской математической олимпиады 1966 года.

Ниже мы сделаем краткий разбор наиболее интересных из них.

ЗАДАЧИ 2 ТУРА
8 класс

1. В треугольник ABC вписан прямоугольник так, что две его вершины лежат на основании треугольника AC, по одной - на сторонах AB и BC. Найти геометрическое место центров прямоугольников.

2. Для каких двузначных чисел $\overline{ab}$ существует такой множитель k, что у произведения $\overline{ab}\cdot k$ предпоследняя цифра 5 ?

3. Можно ли, соблюдая правила игры в домино, выстроить в одну цепочку все косточки, не содержащие шестерок ?

4. Решить в целых положительных числах систему уравнений:

$$\begin{cases} x+y=zw, \\ xy=z+w. \end{cases}$$

5. Какое максимальное число дамок можно расставить по черным полям доски размером 8×8, так, чтобы каждую дамку била хотя бы одна из остальных ? Доказать, что больше дамок расставить нельзя.

9- II классы

I. См. задачу № 4 для 8 класса.

2. При каком k величина $a_k = \frac{19^k + 66^k}{k!}$ максимальна?

3. Внутри окружности расположен выпуклый пятиугольник (вершины его могут лежать как внутри, так и на самой окружности). Доказать, что хотя бы одна из его сторон не больше стороны правильного пятиугольника, вписанного в ту же окружность.

4. Доказать, что те k , для которых k^k+1 делится на 30, образуют арифметическую прогрессию. Найти ее.

5. См.задачу № 5 для 8 класса.

Наиболее интересными из задач второго тура были,пожалуй, задачи №№ I,3 и 5 для отарших классов. Они же оказались на втором туре самыми трудными (исключая не очень трудную, но канительную задачу № 2 для 8 класса). Разберем эти задачи.

Задача № 1. Вычитая почленно из второго уравнения первое и преобразовывая полученное соотношение, имеем:

$$(x-1)(y-1)+(z-1)(w-1)=2 .$$

Так как все скобки в левой части - целые неотрицательные числа, то возможны следующие три слуная:

I . $(x-1)(y-1)=0 ; (z-1)(w-1)=2 .$

2. $(x-1)(y-1)=(z-1)(w-1)=1 .$

3. $(x-1)(y-1)=2; (z-1)(w-1)=0 .$

Теперь нетрудно уже получить все возможные решения.

Задача № 3. На рис. 35 показан способ построения пятиугольника $A'B'C'D'E'$, вписанного в окружность, каждая оторона которого не меньше соответствующей стороны данного

пятиугольника $ABCD$.

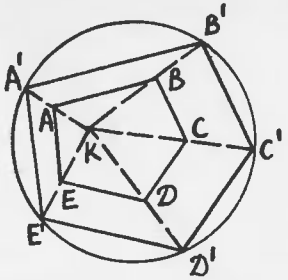


Рис 35

Теперь утверждение задачи доказывается без труда; в любом вписанном пятиугольнике найдется сторона, не большая чем сторона правильного вписанного пятиугольника (потому, например, что найдется сторона, стягивающая угол $\alpha \leq \frac{2\pi}{5}$).

Задача № 5. Заметим, что на черные поля, прилегающие к краю доски, дамки ставить нельзя, поэтому в нашем распоряжении осталось 18 полей; если бы мы заняли их все, то любая из дамок $a, b, c, d, e, f, k, \ell$ (см.рис. 36) не билась бы.

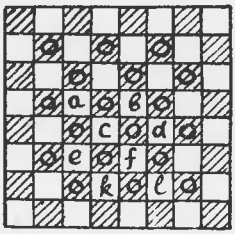


Рис 36

Кроме того, необходимо снять дамку "c" или одну из ее окружающих, а также дамку "f" или одну из ее окружающих.* Итак, на доске останется не больше 16 дамок.

На рис. 37 показано расположение 16 дамок, удовлетворяющее поставленным условиям.

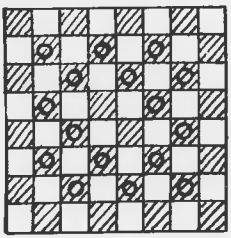


Рис 37

Задачи 3 тура

8 класс.

1. Разделить циркулем и линейкой данный отрезок на 6

* Причем, снять только дамку "c" или "f", очевидно, недостаточно.

равных частей, проведя не более 8 линий (прямых,окружностей).

2. Дано: $a_1 = 1$; $a_k = [\sqrt{a_1 + a_2 + \cdots + a_{k-1}}]$.

Найти: a_{1000}.

3. Из 19 шаров два радиоактивны. Про любую кучку шаров за одну проверку можно узнать, имеется ли в ней хотя бы один радиоактивный шар (но нельзя узнать, сколько таких шаров в кучке). Доказать, что за 8 проверок всегда можно найти оба радиоактивных шара.

4. Сеть метро имеет на каждой линии не меньше четырех станций, из них не более трех пересадочных; ни на какой пересадке не пересекается более двух линий. Какое наибольшее число линий может иметь такая сеть, если с любой станции на любую можно проехать, сделав не более двух пересадок ?

5. Доказать, что существует такое k, для которого $k!$ начинается с 1966.

9-11 классы

1. См. задачу № 1 за 8 класс.

2. Дано: $a_1 = 1966$;

Найти: a_{1966}, если $a_k = [\sqrt{a_1 + a_2 + \cdots + a_{k-1}}]$

3. Из 11 шаров два радиоактивны; кроме того, выполнены все условия задачи № 3 для 8 класса. Доказать, что менее, чем за 7 проверок, нельзя гарантировать обнаружение обоих радиоактивных шаров.

4. Из набора гирь весом 1,2,3 ... 26 г выделить шесть гирь так, чтобы из них нельзя было выбрать две кучки равно-

го веса. Доказать, что нельзя выбрать семь гирь, обладающих тем же свойством.

5. На клетчатой доске размером IIxII отмечены 22 клетки так, что на каждой горизонтали и на каждой вертикали расположены ровно две отмеченные клетки. Два расположения отмеченных клеток называются эквивалентными, если, меняя некоторое число раз горизонтали между собой, а вертикали между собой, мы из одного расположения можем получить другое. Сколько существует неэквивалентных расположений отмеченных клеток ?

Результаты третьего тура видны из следующей таблицы, в которой указано, сколько школьников решило каждую из предложенных задач:

№ задачи	I	2	3	4	5
8 класс	I00	0	0	3	0
9-II классы	500	I00	I	4	I0

Таблица показывает, что задачи оказались очень неравноценными по трудности.

Задача № I. Решение этой задачи приведено на рис. 38. (радиус окружности № 8 равен I/3).

На олимпиаде было дано три различных решения этой задачи; здесь приведено наиболее естественное.

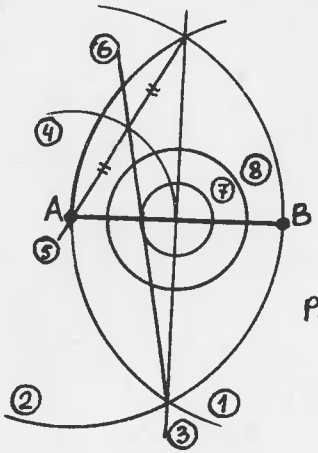


Рис 38

Задача № 2 для 9-11 классов. Идея решения этой задачи становится ясной, если рассмотреть несколько первых шагов процесса: $a_1 = 1966$;

$a_2 = [\sqrt{1966}] = [\sqrt{44^2+30}] = 44$; $\Delta_2 = 30$, $a_3 = 44$;

$a_4 = [\sqrt{2054}] = [\sqrt{45^2+29}] = 45$; $\Delta_4 = 29$; $a_5 = 45$;

$a_6 = [\sqrt{2144}] = [\sqrt{46^2+28}] = 46$; $\Delta_6 = 28$; $a_6 = 46$;

. . . . . .

Замечаем, что числа a_i увеличиваются на единицу через шаг, а добавки Δ_i также через шаг уменьшаются на единицу.

Ясно, что при $\Delta_{2k} = 0$ получится " тройка " , т.е. три числа $a_{2k}; a_{2k+1}; a_{2k+2}$ будут равны; дальше снова числа будут идти попарно, т.е. $a_{2k+1} = a_{2k}$.

Выяснив, сколько " троек " встретится до a_{1966} , мы без труда получим ответ: $a_{1966} = 1024$.

Заметим, что в этом, самом распространенном, решении есть один недостаток: такое решение практически нельзя довести до вычисления, например, $a_{1000000}$. В действительности же, промежутки между "тройками" удваиваются, что позволяет получить общую формулу для a_i .

Задача № 3. Мы будем ставить " + " , если индикатор показал радиоактивность, и " — " в противном случае. Тогда каждому расположению радиоактивных шаров будет соответствовать цепочка из " + " и " — " .

Пусть в первый раз мы взяли на пробу k шаров. Тогда остается еще 5 попыток, т.е. мы можем различить 32 цепочки ($32 = 2^5$).

Если индикатор покажет " + " , то могут быть следующие случаи:

а) среди отобранных шаров оба радиоактивных: $\frac{k(k-1)}{2}$

возможностей;

б) один радиоактивный шар в выбранной кучке, а другой – среди оставшихся шаров: $k(11-k)$ цепочек.

Если индикатор покажет, что среди отобранных k шаров радиоактивных нет, то этому случаю соответствует $\frac{(11-k)(10-k)}{2}$ цепочек.

Ясно, что общее количество цепочек не должно превышать 32. Простым перебором можно убедиться в том, что это условие будет выполнено при $k=3$.

Пусть индикатор показал " – " . Тогда на оставшиеся 8 шаров остается 5 проб. Рассуждая аналогично, убедимся в том, что надо теперь отделить два шара, причем останется 6 шаров и 4 пробы (если индикатор опять показал " – "). Отсюда уже легко получить, что проб не хватит.

Покажем ,что семью пробами обойтись можно. Для этого разделим шары на 5 групп по 2 шара, причем I шар не войдет в группы. Проверим группы.

Если радиоактивность обнаружена только в одной группе, то проверяем оба шара этой группы (либо радиоактивны они оба, либо один из них и " одинокий " шар).

Обнаружив радиоактивность в двух группах, мы проверяем, в них по одному шару.

Что касается варианта этой задачи для 8 шаров, то , видимо, единственный надежный способ – это исследование перед каждым шагом количества возможностей, которые могут представиться после того или иного ответа индикатора.

Наконец, отметим один любопытный факт, полученный при решении этой задачи некоторыми школьниками (Манойло, Кузьминым, Черкасским).

Пусть имеются две кучки по 5 шаров и известно, что в каждой из кучек есть один радиоактивный шар. На первый взгляд, теперь необходимо шесть проверок для выделения шаров: по три на каждую кучку (многие старшеклассники так

и писали : " Очевидно, что шары из разных кучек смешивать невыгодно").

В действительности же необходимо только 5 проверок. Точное решение мы оставляем читателю, укажем лишь, что на первом шаге надо взять два шара – по одному из каждой кучки.

Предлагаем Вам также несколько связанных с этой задач.

I. Имеется n шаров, из них два радиоактивны. За сколько проверок можно гарантировать их нахождение ?

2. Имеется k шаров, среди которых есть радиоактивные (неизвестно, сколько) и ℓ шаров, о которых ничего не известно, всего радиоактивных шаров, по-прежнему, два. Сколько проверок надо в этом случае ?

3. Имеются две группы шаров, в одной k шаров, в другой ℓ . Сколько надо проверок, чтобы найти оба радиоактивных шара?

Повидимому , для полного решения задачи I необходимо решить задачи 2 и 3.

Задача № 4 для 8 класса. Очевидно, что линий метро не больше десяти.

Действительно, с линией № I пересекается не более трех линий, а с каждой из этих трех линий пересекаются, кроме линии № I, еще не больше двух линий, так что $1+3+3\cdot 2=10$.

Сеть метро из десяти линий показана на рис. 39 .

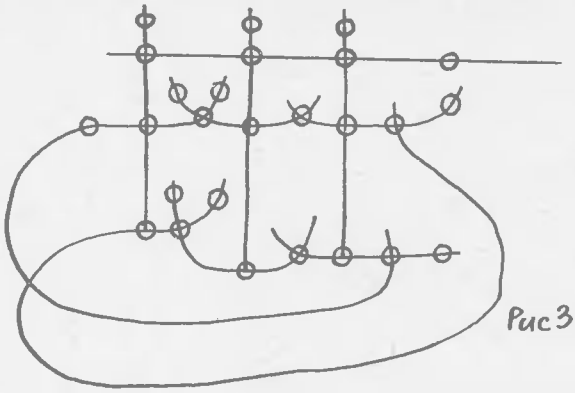


Рис 39.

Задача № 4 для 9-II классов. Приведем несколько наборов из шести гирь:

а) 3 , 6 , I2, 24, 25, 26 ;

б) 26, 24, 22, I8, I2, k (k – любое нечетное число от I до 25);

Доказательство правильности этих наборов нетрудно.

Пусть теперь имеется набор из семи гирь $a_1 \le a_2 \le \dots \le a_7$. Из него можно выбрать $2^7 - 1 = 127$ кучек различного состава. Вес самой легкой кучки a_1 , самой тяжелой $a_1 + a_2 + \dots + a_7$. Следующая за a_1 по весу кучка, очевидно, a_2 , а следующая за самой тяжелой – $a_2 + a_3 + \dots + a_7$; следующая за ней – $a_1 + a_3 + \dots + a_7$.

Не будем рассматривать самую легкую и две самых тяжелых кучки , тогда остается I24 кучки, веса которых меняются от a_2 до $a_1 + a_3 + \dots + a_7$.

Всего , таким образом, имеется $a_3 + a_4 + \dots + a_7 + (a_1 - a_2) + 1$ различных значений, которые может принимать вес.

Отметим теперь, что $a_1 - a_2 + 1 \le 0$,значит, вес может принимать k значений, где $k \le a_3 + a_4 + \dots + a_7$, но $a_3 + a_4 + \dots + a_7 \le 26 + 25 + 24 + 23 + 22 = 120$.

Итак, имеются I24 кучки, веса которых могут принимать не больше, чем I20 значений. Значит, найдутся две кучки равного веса.

Все остальные решения, данные на олимпиаде, а также авторское решение этой задачи, по идее совпадают с приведенным решением.

Задача. Какое максимальное число гирь можно выделить из набора $1, \dots, n$ с соблюдением условий задачи № 4 ?

Полное решение этой задачи до сих пор неизвестно; различные оценки, полученные тем или иным способом, хороши только для конкретных n . Например, известно, что семь гирь нельзя выделить из набора I,2 ... , 32 , девять гирь нельзя выделить из набора I,2 ... , II9 и т.д.

Задача № 5 для 9-II классов. Перестановками строк и столбцов мы всегда можем добиться того, чтобы в левом верхнем углу таблицы образовалась комбинация, приведенная на рис. 40.

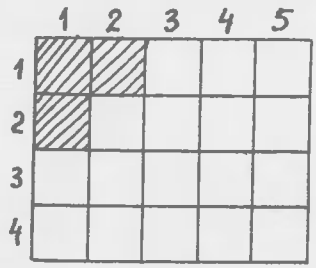


Рис 40

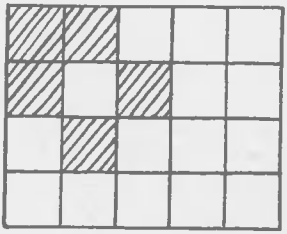


Рис 41

При этом на поле (2,2) либо уже есть отмеченная клетка, либо нет. В первом случае задача свелась к такой же, но уже на доске 9x9; во втором случае мы сможем получить из комбинации рис. 40 комбинацию рис. 41. При этом поле (3.3) либо занято, либо нет, и т.д.

Таким образом, на доске будут образовываться квадраты разного размера (но не меньше, чем 2x2), вдоль диагоналей которых стоят отмеченные клетки (рис. 42). Число II разбивается при этом на сумму слагаемых, каждое из которых не меньше 2.

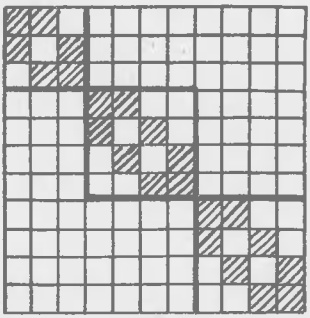


Рис 42

Можно показать, что двум эквивалентным расположениям соответствуют одинаковые разбиения; если же расположения незквивалентны, то разбиения различны. Все разбиения числа II на сумму слагаемых, каждое из которых не меньше двух, легко перебрать; их количество равно 14.

Задача № 5 для 8 класса. Эта задача оказалась самой трудной : ее не только никто не сделал, но ни у одного из

участников в работе не было даже намека на идею решения, которая, в общем-то, довольно проста.

Рассмотрим число $N = 1000100\ldots0$ (количество нулей на конце числа N мы зададим потом). Выясним, как будут меняться первые четыре цифры числа $k!$ при $k = N, N+1, \ldots$:

$$k! = abcde\ldots \quad k! \cdot 100010\ldots = \begin{array}{l} abcde\ldots \\ \times\ 100010\ldots \\ \hline abcde\ldots \\ +\ abcde\ldots \\ \hline abcx\ldots \end{array}$$

Здесь x равен либо d , либо $d+1$ (в зависимости от того, случится ли перенос от суммы $a+e$) так как при этом пятая цифра увеличится (на a), то не реже, чем один раз в десять шагов, перенос будет происходить- число $\overline{abcd}$ будет увеличиваться на единицу.

Пусть теперь $N = 1000100000$. На протяжении 100000 шагов число $\overline{abcd}$ будет увеличиваться не более, чем на единицу, при каждом умножении, но не реже, чем через десять умножений, действительно будет увеличиваться на единицу.

Таким образом, четыре старшие цифры числа $k!$ последовательно пробегут десять тысяч значений, среди которых будет и 1986.

ЗАДАЧИ ВСЕРОССИЙСКОЙ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ОЛИМПИАДЫ 1966 года

(четвертый тур)

8 класс

I. На каждой из планет некоторой системы находится астроном, наблюдающий ближайшую планету. Расстояния между планетами попарно различны. Доказать, что если число планет нечетно, то какую-нибудь планету никто не наблюдает.

2. Точки B и C лежат внутри отрезка AD. Доказать, что если AB равно CD, то для любой точки P выполняется неравенство:

$$PA+PD \geq PB+PC.$$

3. Существуют ли такие натуральные числа x и y, для которых x^2+y и $x+y^2$ – квадраты целых чисел ?

4. Восьмиклассники построены в шеренгу. Перед каждый из них стоит семиклассник, который ниже его по росту. Доказать, что если шеренгу восьмиклассников выстроить по росту и шеренгу семиклассников тоже выстроить по росту, то попрежнему каждый восьмиклассник будет выше стоящего перед ним семиклассника.

5. На клетчатой бумаге нарисован прямоугольник ABCD, стороны которого лежат на линиях сетки, причем AD в k раз больше AB (k – целое число). Рассматриваются всевозможные пути, проходящие по линиям сетки и кратчайшим образом ведущие из A в C. Доказать, что среди этих путей таких, в которых первое звено лежит AD, в k раз больше, чем таких, в которых первое звено лежит на AB.

9 класс.

I. Числа $a_1, a_2, \ldots, a_n$ таковы, что

$$0 \leq a_1 \leq a_2 \leq 2a_1$$
$$a_2 \leq a_3 \leq 2a_2$$
$$\ldots\ldots\ldots$$
$$a_{n-1} \leq a_n \leq 2a_{n-1}$$

Доказать, что в сумме $S = \pm a_1 \pm a_2 \pm \ldots \pm a_n$ можно выбрать знаки так, чтобы было $0 \le S \le a_1$.

2. На плоскости отмечены точки А, В, С и Д. Известно, что для любой точки Р выполняется неравенство $PA+PD \ge PB+PC$.

Доказать, что точки В и С лежат на отрезке АД и $AB = CD$.

3. Полк солдат выстроен в виде прямоугольника таким образом, что в каждой шеренге солдаты стоят по росту. Доказать, что если в каждой колонне перестроить солдат тоже по росту, то в каждой шеренге они попрежнему будут стоять по росту.

4. Доказать, что в выпуклый четырехугольник площади S и периметра Р можно поместить круг радиуса $\frac{S}{P}$.

5. В некотором городе для любых трех перекрестков А, В и С есть путь, ведущий из А в В и не проходящий через С. Доказать, что с любого перекрестка на любой другой ведут, по крайней мере, два непересекающихся пути (перекресток - место, где сходятся, по крайней мере, две улицы; в городе не меньше двух перекрестков).

10-11 классы.

1. См.задачу № 3 из 9 класса.

2. Дан треугольник АВС. Рассматриваются всевозможные тетраэдры РАВС, у которых наименьшей из высот является РН (Н - проекция точки Р на плоскость АВС). Найти геометрическое место точек Н.

3. На плоскости даны 100 точек. Доказать, что их можно покрыть несколькими непересекающимися кругами, сумма диаметров которых меньше 100 и расстояние между любыми двумя из которых больше единицы (расстояние между двумя непересекающимися кругами - это расстояние между их ближайшими точками).

4. Из двух точек А и В , расстояние между которыми

равно d км, одновременно в течение одной секунды наблюдают за самолетом, летящим по прямой с постоянной скоростью. Из точки А сообщили, что самолет сместился за эту секунду на угол α, а из точки В – что он сместился на угол β (углы α и β острые). Какую наименьшую скорость мог иметь самолет ?

5. Написано двадцать чисел : 1,2,3 ... 19,20 . Двое играющих по очереди ставят перед этими числами знаки + или – (знак можно ставить перед любым свободным числом). Первый стремится к тому, чтобы полученная после расстановки всех двадцати знаков сумма была как можно меньше по модулю. Какую наибольшую по модулю сумму может обеспечить себе второй ?

МЕЖДУНАРОДНАЯ МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА 1966 года

Е.А. Морозова

Летом этого года в Софии состоялась международная математическая олимпиада. Соревнования продолжались два дня. Участники олимпиады каждый из этих двух дней в течение трех часов решали по три задачи.

Советская команда выступила очень успешно. Вот ее состав и результаты:

I. Богданский Юрий	шк. № 38	г.Киев	40 очков	I премия
2. Гусейн-Заде Сабир	шк. № 2	г.Москва	40 очков	I премия
3. Заимских Александр	ин-т №I8	г.Москва	33 очка	2 премия
4. Либер Сергей	шк. № 42	г.Саратов	24 очка	
5. Марченко Андрей	шк.№ 27	г.Харьков	40 очков	I премия
6. Матикайнен Борис	ин-т №I8	г.Москва	38 очков	2 премия
7. Розенблюм Григорий	шк.№239	г.Ленинград	39 очков	I премия
8. Фокин Михаил	ин-т	г.Новосибирск	39 очков	- I премия

Ниже мы публикуем условия задач, предложенных на олимпиаде.

Первый день.

I. На олимпиаде были даны три задачи: A,B и C. 25 школьников решили хотя бы одну задачу.

Среди школьников, не решивших задачу A, решивших задачу B в два раза больше, чем решивших C. Школьников, решивших только задачу A , на одного больше, чем остальных школьников, решивших задачу A.

Сколько школьников решило только задачу B, если среди школьников, решивших только одну задачу , половина не решила задачу A ?

(6 очков)

2. Доказать, что если стороны a, b, c и противолежащие им углы α, β, γ некоторого треугольника удовлетворяют соотношению

$$a+b=\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}\left(a\operatorname{tg}\alpha+b\operatorname{tg}\beta\right),$$

то этот треугольник равнобедренный .

(7 очков)

3. Доказать, что сумма расстояний от центра описанного около правильного тетраэдра шара до вершин тетраэдра меньше суммы расстояний от любой другой точки до вершин тетраэдра.

(7 очков)

Второй день

4. Доказать тождество:

$$\frac{1}{\sin 2x}+\frac{1}{\sin 4x}+\cdots+\frac{1}{\sin 2^n x}=\operatorname{ctg} x-\operatorname{ctg} 2^n x,$$

где n - натуральное и $x\neq\frac{\lambda\pi}{2^k}$ ($k=0,1,\ldots,n$, λ - целое).

(5 очков)

5. Решить систему уравнений:

$$\begin{cases} |a_1-a_2|x_2+|a_1-a_2|x_3+|a_1-a_4|x_4=1, \\ |a_2-a_1|x_1+|a_2-a_3|x_3+|a_2-a_4|x_4=1, \\ |a_3-a_1|x_1+|a_3-a_2|x_2+|a_3-a_4|x_4=1, \\ |a_4-a_1|x_1+|a_4-a_2|x_2+|a_4-a_3|x_3=1, \end{cases}$$

где a_1, a_2, a_3, a_4 - данные различные действительные числа.

(7 очков)

6. На сторонах AB, BC, CA треугольника ABC взяты соответственно точки M, K и L (не совпадающие с вершинами). Доказать, что площадь хотя бы одного из треугольников MAL, KBM, LCK не превышает 1/4 площади треугольника ABC.

(8 очков)

В ШКОЛЕ № 2

ЛЕКЦИИ ПО АЛГЕБРЕ.

9 классы

Ю.И.Манин

§ I. Пространства, подпространства, факторпространства.

Линейное пространство L над полем K – это множество, элементы которого, векторы, можно складывать между собой и умножать на элементы поля К (числа) так, что выполняются обычные правила действий. Точное определение см. в книгах И.М.Гельфанда " Лекции по линейной алгебре" и Халмоша " Конечномерные векторные пространства".

Пусть L – линейное пространство. Подмножество векторов $M \subset L$, которое само образует линейное пространство относительно действий, определенных в L, называется (линейным) подпространством пространства L.

Пусть L – линейное пространство, $M \subset L$ – его подпространство. Множество векторов вида $l+m$, где l – фиксированный вектор из L, а m пробегает все элементы M, называется линейным многообразием, параллельным подпространству M.

Легко доказать, что если M_1, M_2 – два линейных многообразия, параллельных M, то либо $M_1 = M_2$, либо пересечение $M_1 \cap M_2$ пусто (это частично оправдывает употребление слова " параллельный ").

ТЕОРЕМА I. Пусть M_1, M_2 – линейные многообразия, параллельные M. Определим множества $M_1 + M_2$ и αM_1, где $\alpha \in K$, следующим образом:

$$M_1 + M_2 = \{ m_1 + m_2 : m_1 \in M_1, m_2 \in M_2 \},$$
$$\alpha M_1 = \{ \alpha m_1 : m_1 \in M_1 \}, \text{ если } \alpha \neq 0,$$
$$0 \cdot M_1 = M.$$

Эти множества также являются линейными многообразиями, параллельными M.

Пусть $L/_M$ – множество всех линейных многообразий, параллельных M. Тогда оно является линейным пространством над К, если операции сложения и умножения на число определены так, как это сделано в теореме I. Оно называется факторпространством L по M.

Пример I. Множество векторов вида $(\alpha_1,\dots,\alpha_n)$, где $\alpha_i \in K$ и n – фиксированное целое число, образует линейное пространство R^n относительно операций покоординатного сложения и умножения.

Пример 2. Система однородных линейных уравнений

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = 0,\quad i = 1,\dots m;\quad a_{ij} \in K$$

определяет в R^n линейное подпространство M, состоящее из всех решений этой системы.

Множество решений аналогичной системы, в правой части которой стоят не обязательно нули,

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_j,\quad i = 1,\dots,m;\quad a_{ij}\in K,\ b_i \in K,$$

составляет в R^n линейное многообразие, параллельное M, если это множество непусто.

Следствие. Если поле К бесконечно, то число решений любой линейной системы уравнений равно либо 0, либо I, либо бесконечно.

Пример 3. Множество непрерывных функций на отрезке $[0,1]$ образует линейное пространство над полем R вещественных чисел. Подмножество функций, обращающихся в нуль на заданном множестве точек $E \subset [0,1]$, образует линейное подпространство.

§ 2. КООРДИНАТЫ, БАЗИСЫ, РАЗМЕРНОСТЬ.

Пусть $\mathcal{L}$ – линейное пространство над полем K

Определение. Системой координат в $\mathcal{L}$ называется такое взаимно –однозначное соответствие $\mathcal{L}$ с пространством R^n, при котором правила действий в $\mathcal{L}$ и в R^n согласованы.

Замечания. I. Не во всяком пространстве существует система координат .

2. Если система координат существует, то она не определена однозначно.

Определение. Пусть в $\mathcal{L}$ задана система координат; множество векторов $e_1,\dots,e_n;\ e_i\in\mathcal{L}$, где e_i – вектор, соответствующий $(0,\dots,1,\dots,0)$ в R^n , называется базисом в $\mathcal{L}$.

Теорема 2. I) Всякий вектор из $\mathcal{L}$ представляется однозначно в виде линейной комбинации элементов базиса.

2) Всякая конечная система векторов из $\mathcal{L}$ такая, что любой другой вектор из $\mathcal{L}$ однозначно представляется в виде линейной комбинации векторов этой системы, является базисом.

Теорема 3. Если в пространстве $\mathcal{L}$ есть хоть один базис, то число элементов этого базиса зависит только от $\mathcal{L}$, но не от выбора базиса.

Это число называется размерностью пространства n.

Замечание. Если пространство $\mathcal{L}$ состоит только из нулевого вектора, то у него нет базиса; говорят, что такое пространство имеет размерность нуль. Пространство, имеющее ненулевые вектора, но не допускающее системы координат, называется бесконечномерным.

Лемма. Если в $\mathcal{L}$ есть базис из n векторов, то любые $n+1$ векторов линейно зависимы.

Доказательство. Проведем индукцию по n . При $n=1$ утверждение очевидно: пусть $\{e\}$ – базис $\mathcal{L}$;любой другой вектор из $\mathcal{L}$ имеет вид αe , где $\alpha\in K$, но векторы $\alpha_1 e$ и $\alpha_2 e$ при любых α_1,α_2 линейно зависимы.

Пусть теперь лемма доказана для $n-1$. Докажем ее для n. Пусть $e_1, \dots, e_n$ – некоторый базис L. Рассмотрим подпространство $M \subset L$, $M = \{\alpha e_n : \alpha \in K\}$. Положим

$\bar{e}_i = e_i + M$, $i = 1, \dots, n-1$. Легко проверить, что векторы $\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_{n-1}$ образуют базис факторпространства L/M.

Пусть теперь $f_1, \dots, f_{n+1}$, $f_i \in L$ – линейно-независимая система $n+1$ векторов из L. Предположим, что она существует, тогда мы придем к противоречию. Положим $\bar{f}_i = f_i + M$. Вектора $\bar{f}_1, \dots, \bar{f}_{n+1}$ лежат в L/M. Так как в L/M есть базис из $n-1$ векторов $\bar{e}_i$, то векторы $\bar{f}_1, \dots \bar{f}_n, \bar{f}_{n+1}$ по индуктивному предположению линейно зависимы. Пусть $\bar{f}_1, \dots, \bar{f}_m$ – наибольшая система линейно-независимых векторов, $m \le n-1$

$$\bar{f}_{m+k} = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \bar{f}_i = 0, \quad k = 1, \dots, n+1-m$$

где не все $\alpha_i = 0$. Следовательно,

$$f_{m+k} = \sum_{i=1}^{m} \alpha_{i_k} f_i + \gamma_k e_n$$

Если $\gamma_k = 0$ для какого-нибудь k, то f_i линейно зависимы. Если же $\gamma_k \neq 0$, то имеем:

$$\gamma_{m+1}\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i f_i\right) - \gamma_{m+2}\left(\sum_{i=1}^{n-1} \beta_i f_i + \beta_{n+1} f_{n+1}\right) = 0$$

что и требовалось доказать. Лемма доказана.

Из этой леммы легко следует теорема 3. В самом деле, из нее вытекает, что если даны два базиса пространства L, то число элементов любого из них не превосходит числа элементов другого, значит, эти числа совпадают.

Вот еще одно интересное следствие из этой леммы.

Теорема 4. Если число неизвестных в однородной системе линейных уравнений больше числа уравнений, то у системы есть ненулевое решение, и значит, число ее решений бесконечно.

Доказательство. Систему уравнений

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = 0 \,, \quad i = 1, \ldots, m$$

можно рассматривать как уравнение линейной зависимости векторов в пространстве K^m:

$$\sum_{j=1}^{n} x_j \, (a_{1j}; a_{2j}; \ldots; a_{mj})$$

Если $n > m$, то в силу леммы между n векторами коэффициентов $(a_{1j}; \ldots; a_{mj})$ всегда существует линейная зависимость. Учитывая утверждение примера 2, находим

Следствие. Если у системы линейных уравнений над бесконечным полем (не обязательно однородной) число неизвестных больше числа уравнений, то эта система либо вообще не имеет решений, либо имеет их бесконечно много.

Теорема 5. Если в пространстве L имеется конечное число образующих, то есть и базис.

§ 3. ПРИМЕНЕНИЯ К КОНЕЧНЫМ ПОЛЯМ

Пусть K – конечное поле из q элементов. Обозначим через k_0 подмножество всех элементов из K, которые можно представить в виде суммы конечного числа единичных элементов поля K.

Теорема 6. k_0 является подполем поля K, изоморфным полю классов вычетов по модулю некоторого простого числа p, которое называется характеристикой поля K.

Всякое конечное поле K, очевидно, можно рассматривать как линейное пространство над полем k_0.

В K есть система координат над k_0 в силу теоремы 5, значит, K как множество находится во взаимно-однозначном соответствии с множеством k_0^n, состоящим из p^n элементов.

Следствие. Число элементов всякого конечного доля является степенью простого числа.

Замечание. Можно доказать, что для всякого простого числа p и целого $n \geq 1$ существует ровно одно поле, состоящее из p^n элементов.

Вообще, пусть K – конечное поле из q элементов. Если L – n – мерное пространство над K, то число элементов в L равно q^n. Число элементов любого линейного подмногообразия пространства L равно q^m, где $0 \leq m \leq n$.

Следствие. Пусть K – конечное поле из q элементов. Число решений любой системы линейных уравнений над полем K от n неизвестных равно либо нулю, либо q^m, где $0 \leq m \leq n$.

§ 4. ПРОЕКТИВНОЕ ПРОСТРАНСТВО.

Пусть L^n – n – мерное линейное пространство над полем K. Множество прямых, проходящих через начало координат в L, называется $n-1$ – мерным проективным пространством P^{n-1}.

Множество прямых, пересекающих фиксированное линейное многообразие, является проективным подпространством.

Теорема. P^{n-1} как множество можно представить в виде объединения непересекающихся линейных пространств

$$L^{n-1} \cup L^{n-2} \cup \ldots \cup L^0 .$$

Указание. Полезно представить себе P^2 как множество точек, отождествленных с прямыми, которые прокалывают плоскость, не проходящую через начало координат, в этих точках с присоединенными бесконечно удаленными точками.

Теорема. Две проективные прямые на проективной плоскости либо совпадают, либо пересекаются в одной точке.

Топология вещественной проективной плоскости: сфера, заклеенная листом Мёбиуса.

§ 5. КОНТРОЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ

I. Доказать:

а) что все многочлены степени $\leq n$ от одного неизвестного с коэффициентами из поля K образуют линейное

пространство с обычным сложением многочленов и умножением на элементы из K. Найти базис и размерность этого пространства;

б) то же самое для многочленов с двумя неизвестными.

2. Пусть L^n и L^m – два линейных пространства над полем K размерностей соответственно n и m.

Отображение $f: L^n \to L^m$ называют линейным, если оно удовлетворяет следующим условиям:

а) $f(x+y) = f(x) + f(y)$; $x, y \in L^n$;

б) $f(\lambda x) = \lambda f(x)$, $\lambda \in K$, $x \in L^n$.

Доказать, что в множество всех линейных отображений можно ввести структуру линейного пространства. Найти его размерность.

3. Перечислить все линейные подпространства и линейные многообразия трехмерного линейного пространства.

4. Доказать, что если сумма размерностей двух линейных подпространств n-мерного пространства больше n, то эти подпространства имеют общий ненулевой вектор.

5. Найти форму тела, полученного в сечении четырехмерного куба $|x_i| \le 1$; $i = 1,2,3,4$ трехмерной гипер-плоскостью, заданной уравнением:

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0$$

6. Показать, что над полем комплексных чисел ненулевое линейное отображение $f: L^2 \to L^2$ имеет ненулевой собственный вектор.

7. Привести пример линейного отображения линейного двумерного векторного пространства в себя над полем действительных чисел, не имеющего одномерного инвариантного подпространства.

8. Пусть (x, y) обозначает скалярное произведение в n-мерном вещественном пространстве. Доказать неравенство Коши-Буняковского:

$$(x, y) \le (x, x)(y, y); \quad x, y \in L^n.$$

9. Пользуясь неравенством Коши-Буняковского, доказать неравенство треугольника:

$$\rho(x,y)+\rho(y,z)\geq\rho(x,z),$$

где $\rho(u,v)$ - функция, определяемая формулой:

$$\rho(u,v)=\sqrt{(u-v,u-v)}.$$

10. Доказать теорему косинусов в треугольнике, пользуясь скалярным умножением векторов.

11. Доказать, что поворот плоскости на угол α является линейным преобразованием. Найти матрицу этого преобразования в прямоугольной системе координат.

12. Доказать, что любое линейное преобразование одномерного линейного пространства сводится к умножению всех векторов на один и тот же элемент основного поля.

13. Ортогональным дополнением к подпространству M пространства L^n называется совокупность M^* всех векторов из L^n, скалярное произведение каждого из которых с любым вектором из M равно нулю. Доказать, что M^* является линейным подпространством в L^n и сумма размерностей M и M^* равна n.

14. Найти базис ортогонального дополнения M^* к подпространству M в L^4, натянутого на векторы:

$$a_1=(1;0;2;1)$$
$$a_2=(2;1;2;3)$$
$$a_3=(0;1;-2;1)$$

15. Линейное преобразование n - мерного пространства, сохраняющее скалярное произведение, называется ортогональным. Описать ортогональные преобразования плоскости в прямоугольной системе координат.

16. Найти число диагоналей n - мерного куба, ортогональных к данной диагонали.

17. Сколько точек в n - мерном проективном пространстве над конечным полем из q элементов ?

I8. Найти наименьшее число параметров, которыми описывается множество прямых в трехмерном проективном пространстве.

О ЗАНЯТИЯХ ВЕЧЕРНЕЙ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ШКОЛЫ

В вечерней математической школе при МГУ читаются лекции для учащихся VIII – X классов.

Лекции происходят в Главном здании МГУ на Ленинских горах в аудитории 02:

для VIII классов-по понедельникам с I6 до I8 часов;

для IX – X классов-по воскресеньям с I0 до I2 часов.

В I семестре I966/67 учебного года были прочитаны следующие лекции:

VIII классы

24 октября.Доц.А.Л.Онищик.Теорема о неподвижной точке.

3I октября.Проф.А.И.Маркушевич.О разностях.

I4 ноября.Доц.В.М.Алексеев.Геометрия с конечным числом точек.

2I ноября.Доктор ф.-м.наук И.М.Яглом.О многоугольниках.

I2 и I9 декабря.Проф.В.А.Ефремович.Наглядная топология.

IX и X классы

I6 и 23 октября.Доц.Р.А.Минлос.Группы.

30 октября.Доктор ф.-м.наук В.А.Успенский.Эксперименты с конечными автоматами.

I3 и 20 ноября.Член-корр.АН СССР А.А.Марков.Конструктивная математика.

27 ноября.Доктор ф.-м.наук Я.Г.Синай.Статистические свойства длинных самонепересекающихся ломаных.

11 декабря. Академик П.С.Александров. Проективная плоскость.
18 декабря. Доц. Е.А.Морозова. О международных математических олимпиадах.

В следующем семестре будут прочитаны лекции:

Для VIII классов

16 и 23 января. Канд.ф.-м.наук Ю.А.Шрейдер.
6 и 13 февраля. Канд.ф.-м.наук С.Г.Гиндикин.
20 февраля. Канд.ф.-м.наук А.А.Егоров.
27 февраля. Доц. Н.И.Фельдман.
6 марта. Проф. М.Р.Шура-Бура.
13 марта. Доктор ф.-м.наук О.В.Локуциевский.

Для IX и X классов

15 января. Проф. Л.В.Келдыш.
22 января. Проф. П.К.Рашевский.
12 февраля. Проф. А.А.Бухштаб.
19 февраля. Доктор ф.-м.наук А.М.Олевский.
26 февраля. Член-корр. АН СССР Б.Н.Делоне.
12 марта. Проф. В.И.Арнольд.
19 марта. Проф. А.А.Кириллов.

Для учащихся VII и VIII классов, кроме того, проводятся групповые занятия под руководством студентов.

Занятия происходят в помещении школы №2 /Ленинский проспект, дом 58 а /для VII классов по пятницам с 17 часов, а для VIII классов-по понедельникам с 18ч.20м.